ALGEBRA

SEPARATAS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición: Una fracción algebraica es la razón indicada de dos expresiones algebraicas racionales, de las cuales el denominador no debe ser una constante.

Ejemplo:

$P(x)= \dfrac{x+1}{x+2}$ $\begin{array}{l}\rightarrow \text{dividiendo} \\ \rightarrow \text{divisor}\end{array}$

$Q=(x)= \dfrac{x+4}{145}$; No es una fracción algebraica.

1. CLASIFICACIÓN

a) FRACCIONES PROPIAS:

Cuando el numerador es de menor grado que el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x+1}{x^2+1};\ \frac{x^2+5x-2}{x^3-3x+1}$$

b) FRACCIONES IMPROPIAS:

Cuando el numerador es de mayor grado que el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x^3-1}{x^2+1};\ \frac{x^4+x^2-2}{x^3+x-7}$$

c) FRACCIONES HOMOGÉNEAS:

Son aquellas que tienen igual denominador.

$$\frac{2m}{m^2-1};\ \frac{5m}{m^2-1};\ \frac{a+b}{m^2-1}$$

d) **FRACCIONES EQUIVALENTES**:

Son aquellas que teniendo formas diferentes se caracterizan porque siempre tendrán los mismos valores numéricos, para cualquier valor asignado a sus variables, a excepción de aquellos que hagan cero el denominador

Ejemplo:

$$\frac{x+3}{x^2+5x+6} <> \frac{1}{x+2}\ \forall x \neq -3;-2$$

Así por ejemplo:

Para x=0

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

e) FRACCIONES COMPLEJAS O COMPUESTAS:

Se caracterizan porque en su numerador o denominador aparecen otras fracciones algebraicas.

Ejemplo:

$$A=3+\cfrac{x+1}{x+\cfrac{7}{x-\cfrac{x^2+1}{x^2-1}}}$$

f) FRACCIONES CONTINUAS:

Es un caso auxiliar de las fracciones complejas, que se caracteriza porque el numerador de cada fracción siempre es la unidad.

Ejemplo:

$$M=3+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+1}}}$$

g) FRACCIÓN IRREDUCTIBLE:

Son aquellas fracciones que se caracterizan porque en el numerador y denominador aparecen expresiones que no tienen ningún factor común (el numerador y denominador son primos entre sí) es decir no admiten simplificación:

Ejemplo:

$$\frac{x+2}{x-2};\frac{2}{x}$$

2. SIGNOS DE UNA FRACCIÓN:

Toda fracción posee tres signos:

- Signo de la fracción
- Signo del numerador
- Signo del denominador

El cambio de dos de estos signos no altera el signo total de la fracción. Así:

$$F=+\frac{+a}{+b}=-\frac{-a}{+b}=-\frac{+a}{-b}=+\frac{-a}{-b}$$

Ejemplo 1:

Simplificar:

$$E=\frac{a-b}{b-a}$$

Solución:

cambiando de signo a la fracción y al numerador.

$$E=-\frac{(b-a)}{(b-a)}=-1$$

Ejemplo 2:

Simplificar:

$$E=\frac{(a-b)(a-c)}{(b-a)(c-a)}$$

Solución:

Cambiando de signo a los dos factores del denominador se obtiene:

$$E=\frac{(b-a)(a-c)}{(b-a)(a-c)}+1$$

Ejemplo 3:

Simplificar:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}-\frac{1}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{c}-\mathrm{a})}$$

Solución:

cambiando de signo al factor (c-a) en la segunda fracción, se obtiene:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}-\frac{1}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}$$

$$\mathrm{E}=0$$

3. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGABRAICAS:

Simplificar una fracción algebraicas es transformarla en otra equivalente, cuyos términos contengan menos factores comunes, para ello:

1° Se factorizan los términos de la fracción:

2° Se suprimen los factores comunes de los términos de la fracción (se cancelan).

Ejemplo 1:

Simplificar:

$$F=\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$$

Solución:

De acuerdo a la regla:

1° Factorizando los términos de la fracción.

$$\cancel{F=}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)};\ \forall x\neq -2;1$$

2° Eliminando los factores comunes:

$$F=\frac{x+3}{x-1};\ \forall x\neq 1$$

ALGEBRA

Ejemplo 2:

Simplificar:

$$F = \frac{21x + 21 - xy - y}{31x + 31 + xy + y}$$

Solución:

1° Factorizando el numerador y denominador:

$$F = \frac{21(x+1) - y(x+1)}{31(x+1) + y(x+1)}$$

$$F = \frac{(x+1)(21-y)}{(x+1)(31+y)}$$

2° Cancelando los factores comunes:

$$F = \frac{21-y}{31-y};\ \forall y \neq -31$$

4. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Las operaciones con fracciones algebraicas tienen las mismas reglas, que las fracciones numéricas o aritméticas.

a) Adición y sustracción de Fracciones Algebraicas.

Para sumar o restar dos o más fracciones con distintos denominadores, se procede de la siguiente manera:

1° Se simplifica cada fracción, si fuera posible.

2° Se halla el M.C.M. de los denominadores.

3° Se divide el M.C.M. hallado entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.

4° Se reducen los términos semejantes en el numerador y en el denominador.

5° Se simplifica la fracción resultante, si fuera posible.

Ejemplo 1:

Hallar la suma de:

$$F = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a^2 - b^2)(a+b)} + \frac{b - 2a}{b - a} + \frac{7a}{3(a+b)}$$

Solución:

Cambiando de signos a la segunda fracción:

$$F = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a-b)(a+b)} + \frac{2a - b}{a - b} + \frac{7a}{3(a+b)}$$

Dando mínimo común denominador.

$$F = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2 + 3(2a-b)(a+b) + 7a(a-b)}{3(a-b)(a+b)}$$

ALGEBRA

Efectuando operaciones en el numerador.

$$F=\frac{4ab+2b^2-12a^2+6a^2+3ab-3b^2+7a^2-7ab}{3(a-b)(a+b)}$$ Reduciendo:

$$F=\frac{(a^2-b^2)}{3(a^2-b^2)} \Rightarrow F=\frac{1}{3}$$

Ejemplo 2:

Efectuar:

$$Q=\frac{a^2+1}{a^2-1}+\frac{a+1}{2a-2}-\frac{a-1}{2a+2}-\frac{4a}{a^2-1}$$

Solución:

Factorizando los denominadores, se tiene:

$$Q=\frac{a^2+1}{(a+1)(a-1)}+\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{a-1}{2(a+1)}-\frac{4a}{(a+1)(a-1)}$$

Dando mínimo común denominador:

$$Q=\frac{2(a^2+1)+(a+1)^2-(a-1)^2-8a}{2(a+1)(a-1)}$$

Efectuando operaciones en el numerador:

$$Q=\frac{2a^2+2+a^2+2a+1-a^2+2a-1-8a}{2(a+1)(a-1)}$$

Reduciendo términos semejantes en el numerador:

$$Q=\frac{2a^2-4a+2}{2(a+1)(a-1)}=\frac{2(a^2-2a+1)}{2(a+1)(a-1)}$$

$$Q=\frac{(a-1)(a-1)}{(a+1)(a-1)} \Rightarrow Q=\frac{a-1}{a+1}$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Efectuar:

$$\frac{x+3}{x-5}+\frac{x+1}{x-4}$$

Resolución:

Rpta. $\dfrac{2x^2-5x-17}{(x-5)(x-4)}$

2. Efectuar:

$$\frac{3x}{x-2}-\frac{1}{x+4}$$

Resolución: Rpta. $\dfrac{3x^2+11x+2}{(x-2)(x+4)}$

3. Simplificar:

$$M = \frac{x+y-z}{z-x-y} + \frac{x-y+z}{y-x-z}$$

Resolución:

Rpta. -2

4. Reducir:

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$$

Resolución:

Rpta. 0

5. Siendo: $\{a;b;c\} \subset R^+$, la raíz cuadrada de:

$$M = \frac{\frac{2b}{a} + \frac{2b}{b+c}}{\frac{1}{ac} - \frac{1}{bc+c^2}} . \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right); \text{ es:}$$

Resolución:

Rpta. a + b + c

6. Simplifique:

$$K = \frac{\left(\frac{1+a}{1-5a}\right)^2 + \frac{2+2a}{1-5a} - 3}{5\left(\frac{1+a}{1-5a}\right)^2 + \frac{16+16a}{1-5a} + 3}$$

Resolución:

Rpta. a

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Simplificar:

$$M_{(x)} = \frac{x^3-1}{2x+1-\frac{x}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}}$$

a) (x+1) b) (x-1 c) (x-2)
d) (x+2) e) N.A.

ALGEBRA

2. Simplificar:

$$N_{(x)} = \frac{x^3+1}{1-2x+\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$$

a) (x-1) b) (x+1) c) (x+2)
d) (x-4) e) N.A.

3. Simplificar:

$$M = \frac{1-ax^2+a-x^2}{(1+ax)^2-(x+a)^2}$$

a) $\frac{1}{1+a}$ b) $\frac{2}{2+a}$ c) $\frac{3}{3-a}$
d) $\frac{1}{1-a}$ e) N.A.

4. Simplificar:

$$Q = \frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{8a^3b+8ab^3}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) N.A.

5. Simplificar:

$$W = \frac{(a^2+x^2)^2-a^2x^2}{a^6-x^6}$$

a) $\frac{1}{a^2-x^2}$ b) $\frac{1}{a^2+x^2}$ c) $\frac{1}{a}$
d) $\frac{1}{x}$ e) N.A.

6. Simplificar:

$$R = \frac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}$$

a) $\frac{2x+y}{x-4}$ b) $\frac{2x-y}{4}$ c) $\frac{x}{y}$
d) $\frac{y}{2x}$

Efectuar:

$$K = \frac{1}{x-5} - \frac{2}{x^2-8x+15} - \frac{1}{x^2-5x+6}$$

a) $\frac{1}{x+2}$ b) $\frac{1}{x-2}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{2x}$ e) N.A

ALGEBRA

7. Efectuar:

$$M = \frac{a^2-9b^2}{a^2+2ab-3b^2} + \frac{b^2-9a^2}{b^2+2ab-3a^2}$$

a) a b) 2b c) a+b

d) 4 e) 3

8. Efectuar:

$$P = \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{3}{x^2-1} + \frac{3}{(x+1)(2-x)}$$

a) $\frac{1}{x-1}$ b) $\frac{x}{x-5}$ c) $\frac{x+1}{x-1}$

d) $\frac{5}{1-x^2}$ e) $\frac{3}{x^2-1}$

9. Efectuar:

$$Q = \frac{2x-y}{x-y} - \frac{12x^2-4xy-2y^2}{3x^2-3y^2} + \frac{7x}{3x+3y}$$

a) x - y b) 1/3 c) 1/2

d) 2x – 3y e) 3/4