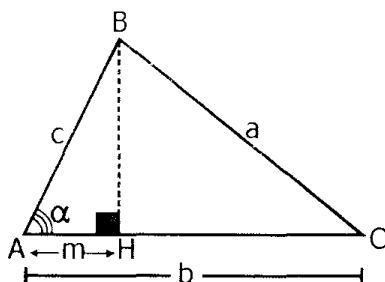




RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIANGULOS RECTANGULOS

1^{er} Teorema de Euclides

El cuadrado del lado que se opone a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de uno de estos lados multiplicado por la proyección del otro lado sobre este.

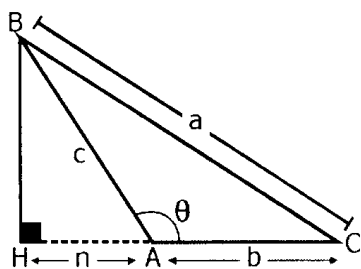


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.m$$

$$(\alpha < 90^\circ)$$

2^{do} Teorema de Euclides

El cuadrado del lado que se opone a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el doble de uno de estos lados multiplicado por la proyección del otro lado sobre este.

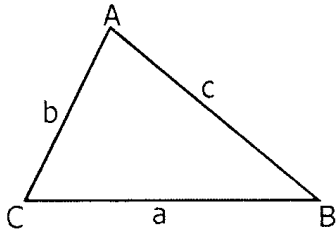


$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b.n$$

$$(\theta > 90^\circ)$$

Naturaleza de un triángulo

Sean: "a", "b" y "c" los lados de un triángulo ABC tal que:
 $a > b$ y c . Así:



Luego si:

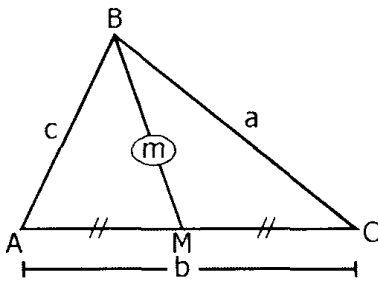
$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \text{El } \triangle ABC \text{ es acutángulo}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \text{El } \triangle ABC \text{ es rectángulo}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \text{El } \triangle ABC \text{ es obtusángulo}$$

Teorema de la Mediana

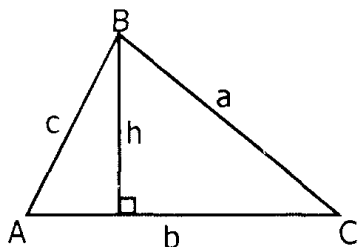
En todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados es igual al doble del cuadrado de la mediana relativa al tercer lado más la mitad del cuadrado de dicho tercer lado.



$$a^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}$$

Teorema de la Mediana

Se utiliza para calcular alturas



$$h = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

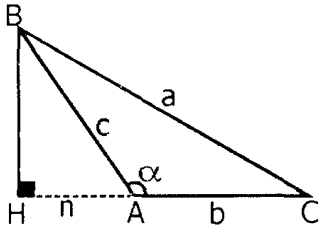
EJEMPLOS

1. En un triángulo ABC donde:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{2}$$

Hallar uno de sus ángulos interiores.

Resolución:



Segundo teorema de Euclides:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn \dots (1)$$

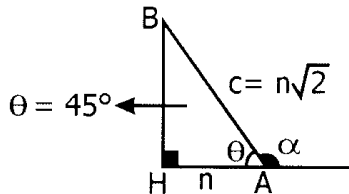
Dato:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{2} \dots (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$2bn = bc\sqrt{2} \rightarrow \frac{2n}{\sqrt{2}} = c$$

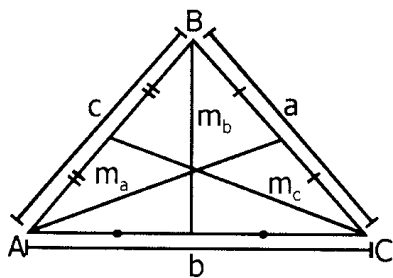
$$n\sqrt{2} = c \Rightarrow \triangle BHA:$$



$$\Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

2. En un triángulo, la suma de los cuadrados de los lados es 28. Hallar la suma de los cuadrados de las medianas del triángulo.

Resolución:



Teorema de la mediana:

$$\left. \begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ a^2 + c^2 &= 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 &= 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \end{aligned} \right\} +$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

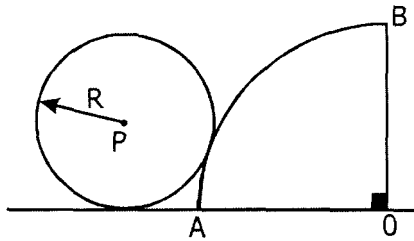
$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} = \frac{4}{3}$$

Luego: $\frac{28}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} = \frac{4}{3}$

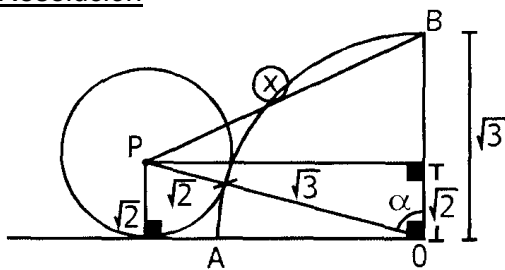
$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 21$$

3. Calcular "PB":

si: $AO = OB = \sqrt{3}$ y $R = \sqrt{2}$



Resolución



En el $\triangle OPB$ por el teorema de Euclides:

$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})\sqrt{2}$$

$$x^2 = 3 + 2 + 3 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. En un triángulo cuyos lados miden 6, 9 y 10 cm, hallar la longitud de la proyección del lado menor sobre el lado mayor.

- a) 1,5 cm b) 0,75 c) 2,25
d) 2,75 e) 1,25

Resolución:

2. Dado el triángulo ABC:
AB = 2 cm, BC = 4 cm y AC = 3 cm.
Calcular la proyección de \overline{AB} sobre \overline{AC} .

- a) 1 cm b) 1,5 c) 0,5
d) 0,25 e) 0,75

Resolución:

3. En el triángulo PQR: PQ = 10 cm, QR = 17 cm y PR = 21 cm. Hallar la longitud de la altura \overline{QH} .

- a) 8 cm b) 9 c) 6
d) 7 e) $4\sqrt{2}$

Resolución:

4. En el triángulo de lados que miden 6, 8 y 12 cm, calcular la longitud de la menor mediana del triángulo.

- a) $\sqrt{11}$ cm b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{15}$
d) $\sqrt{14}$ e) $\sqrt{17}$

Resolución:

5. En un triángulo cuyos lados miden 13, 14 y 15 cm, calcular la altura relativa al lado intermedio.

- a) 10 cm b) 11 cm c) 12 cm
d) 9 cm e) 8 cm

Resolución:

6. Dado el triángulo cuyos lados miden 13, 14 y 15 u, calcular el menor ángulo interior del triángulo.
- a) 37° b) 45° c) 60°
 d) 53° e) 30°

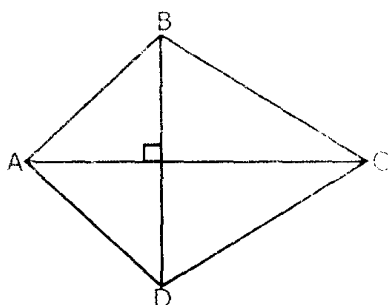
Resolución:

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

8. El triángulo cuyos lados miden 12, 16 y 25 cm, se puede clasificar como:
- a) acutángulo b) rectángulo
 c) obtusángulo d) isósceles
 e) no existe el triángulo
9. En el triángulo isósceles ABC: $AB = c$ y $BC = AC = m$. Hallar la proyección de \overline{AB} sobre \overline{AC} .
- a) $\frac{m^2}{c}$ b) $\frac{2m^2}{c}$ c) $\frac{c^2}{m}$
 d) $\frac{2c^2}{m}$ e) $\frac{c^2}{2m}$

10. Si: $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm y $AD = 6$ cm, hallar "CD".



- a) $\sqrt{30}$ cm b) $3\sqrt{15}$ c) $2\sqrt{30}$
 d) $2\sqrt{15}$ e) $4\sqrt{11}$

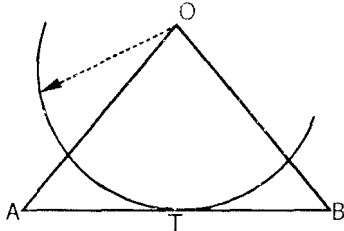
4 En un romboide sus lados miden: 4 y 6u. Además una de sus diagonales mide 9u, calcular la longitud de la otra diagonal.

- a) $\sqrt{21}$ u b) $\sqrt{23}$ c) $\sqrt{29}$
 d) $2\sqrt{5}$ e) $3\sqrt{6}$

5 Determinar el menor lado de un triángulo cuyas medianas miden 9, 12 y 15 u.

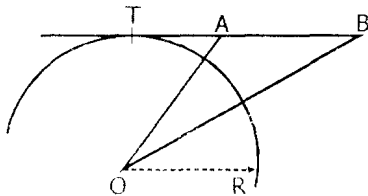
- a) $2\sqrt{71}$ u b) $3\sqrt{21}$ c) $2\sqrt{73}$
 d) $\sqrt{131}$ e) $4\sqrt{19}$

6 Hallar "AT", si: OA = 16 cm, OB = 9 cm y AB = 20 cm.



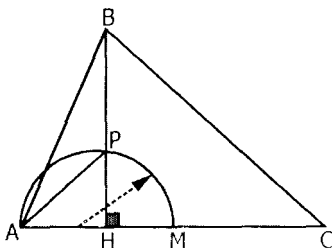
- a) 11,25 cm b) 12,75
 c) 14,375 d) 16,115
 e) 10,125

7 Si: OA = 10 u, AB = 9 u y OB = 17 u, hallar "R".



- a) 6 u b) 8 c) 9
 d) 10 e) 5

8 Hallar "AP", si: AB = 8 cm, AC = BC = 10 cm y AM = MC.



- a) 2 cm b) 3 c) 4
 d) 3,2 e) 4,8

9. En un romboide ABCD:
 $AB = 3$ cm, $AD = 5$ cm y $AC = 7$ cm.
 Hallar: $m \angle A$

- a) 90° b) 120° c) 75°
 d) 60° e) 45°

7. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), $AB = 5$,
 $BC = 4$, $CD = 6$ y $AD = 11$. Calcular la
 altura de dicho trapecio.

- a) $\frac{12}{7}$ b) $\frac{12}{7}\sqrt{6}$ c) $\frac{6}{7}\sqrt{6}$
 d) $\frac{6}{7}$ e) $\frac{5}{7}\sqrt{3}$

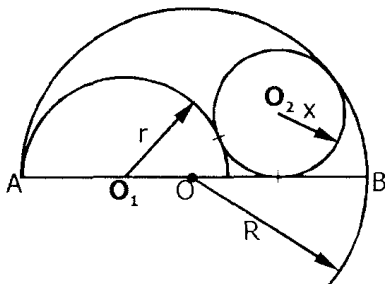
8. Las bases de un trapecio miden 4 y 10 u y
 los lados no paralelos miden 5 y 7 u.
 Hallar el segmento que une los puntos
 medios de las bases.

- a) $2\sqrt{7}$ u b) $3\sqrt{7}$ c) $2\sqrt{14}$
 d) $3\sqrt{14}$ e) $\sqrt{21}$

9. En un triángulo ABC; la mediana \overline{BM} y la
 bisectriz interior \overline{AF} son perpendiculares.
 Hallar "BM", si: $AB = 6$ cm y $BC = 8$ cm.

- a) $\sqrt{13}$ cm b) $\sqrt{14}$ c) $\sqrt{15}$
 d) $2\sqrt{3}$ e) 4

13. Hallar "x", si: $r = 5$ cm y $R = 9$ cm



- a) 5,28 cm b) 2,02 c) 3
 d) 3,67 e) 2,58