LÍNEAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Indicador:

Reconocer y trazar cualquier línea notable de un triángulo.

Altura

Es el segmento de recta que parte de uno de los vértices de un triángulo y llega en forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación. Así en la Fig. 5.1a y 5.1b $\overline{BF}$ y $\overline{BL}$ representan las alturas de dichos triángulos. En la Fig. 5.1c se observa trazadas las tres alturas, siendo el punto de concurrencia (H) el ortocentro del triángulo ABC.

a)

c)

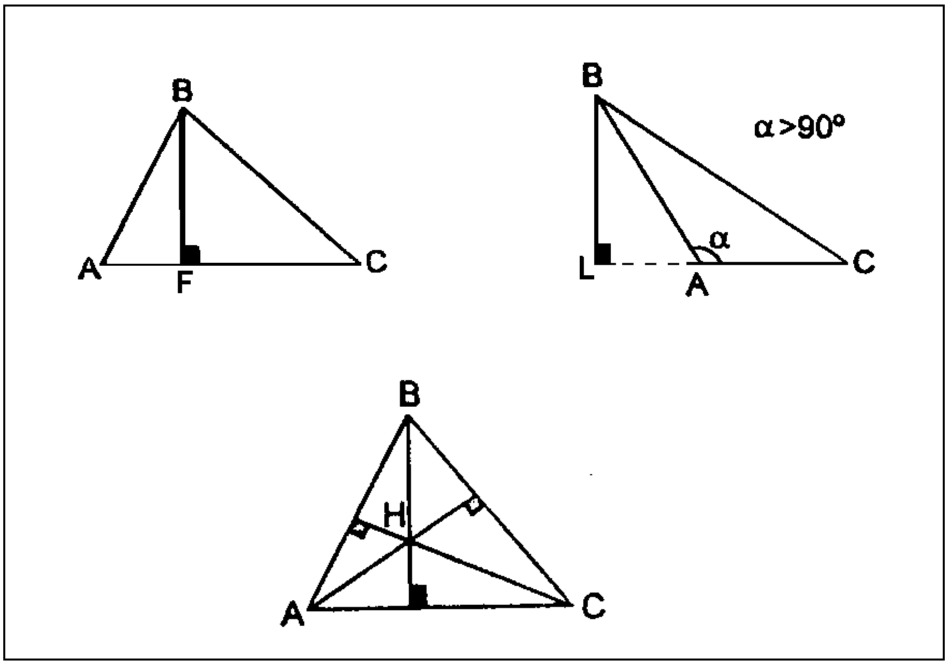


Fig. 5.1 Observaciones:

- El ortocentro es interior para un triángulo Acutángulo.
- El ortocentro es exterior para un triángulo Obtusángulo.
- El ortocentro está ubicado en el vértice del ángulo recto para un triángulo Rectángulo.

Mediana

Es el segmento de recta que tiene por extremos uno de los vértices de un triángulo y el punto medio del lado opuesto. En la Fig. 5.2, $\overline{BM}$ representa una de las tres medianas del ΔABC; en la Fig. 5.2b podemos apreciar dibujadas las tres medianas y el punto de concurrencia G llamado Baricentro.

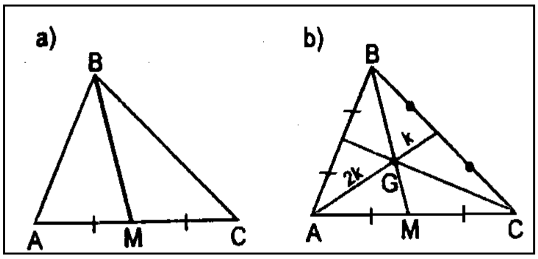


Fig. 5.2

Observaciones

- El baricentro es un punto interior al triángulo.
- El baricentro divide a la mediana en la razón de 2 a 1.

Mediatriz

Esta línea se define para cado lado del triángulo y viene a ser la recta perpendicular a dicho lado en su punto medio; así como $\overline{L}$ lo es para $\overline{AC}$.(Fig. 5.3a)

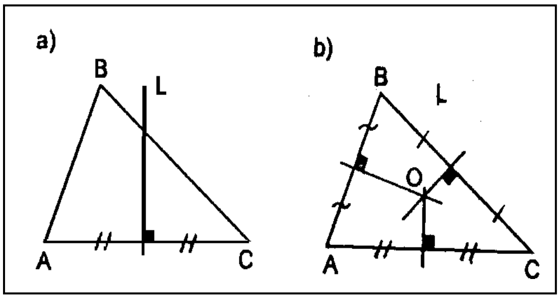


Fig. 5.3

En la (Fig. 5.3b) observamos trazadas las 3 mediatrices del $\triangle$ABC que concurren en el circuncentro (O) del $\triangle$ABC.

Observaciones

- El circuncentro es un punto interior, exterior y esta ubicado en el punto medio de la hipotenusa. Si el triángulo es acutángulo, obtusángulo o rectángulo respectivamente.

Bisectriz

La Bisectriz de un triángulo es la porción o una parte correspondiente a la bisectriz de uno de los ángulos (interior o exterior) de un triángulo, limitada por el lado opuesto o por su prolongación, tal como sucede con la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la bisectriz exterior $\overline{BF}$ del ABC (Fig. 5.4a). El punto donde concurren las tres bisectrices interiores de un triángulo se llama incentro (I) (Fig. 5.4b)

El punto donde concurren dos bisectrices exteriores con la prolongación de la bisectriz interior trazada desde el tercer vértice recibe el nombre de Excentro E (Fig. 5.4c).

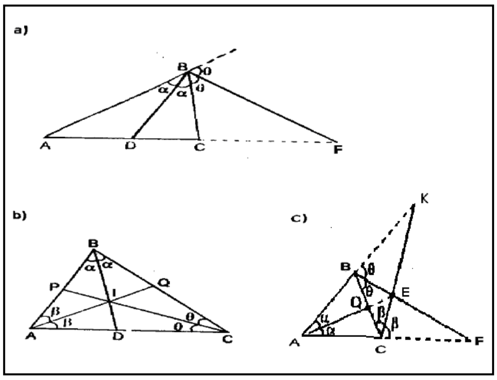


Fig. 5.4

Observaciones:

- El incentro es un punto interior para todo triángulo.
- En todo triángulo existen 3 excentros los cuales son exteriores a él.

- En todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo exterior correspondiente al vértice opuesto a la base es paralela a esta.

Ceviana

Es todo segmento de recta que une el vértice de un triángulo con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación. En la (Fig. 5.5a) $\overline{BP}$ es Ceviana interior y $\overline{BQ}$ es la ceviana exterior; en la (Fig. 5.5b) se observan tres cevianas concurrentes en el punto "J" llamado punto Ceviano.

Observaciones

- El nombre de Ceviana se debe al célebre matemático italiano Giovanni Ceva.
- En todo triángulo se pueden trazar infinitas cevianas.
- El punto ceviano puede ser exterior.

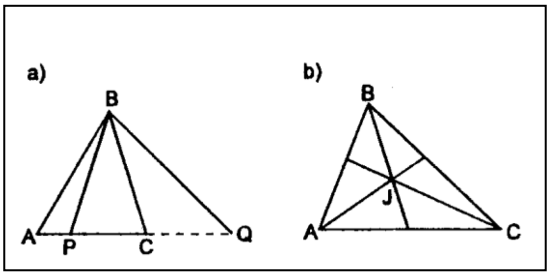


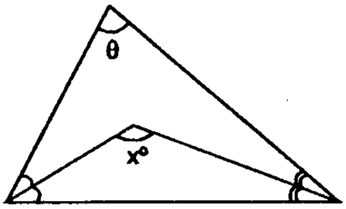
Fig. 5.5

Propiedades generales

1° Propiedad

"El mayor ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos interiores de un triángulo, es obtuso, e igual a 90° más la mitad de la medida del tercer ángulo interior"

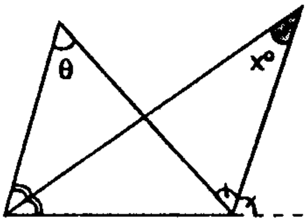
$$\boxed{x = 90° + \frac{\theta}{2}}$$



2° Propiedad

"El menor ángulo formado por las bisectrices, una interior y la otra exterior de un triángulo es igual a la mitad de la medida del tercer ángulo interior".

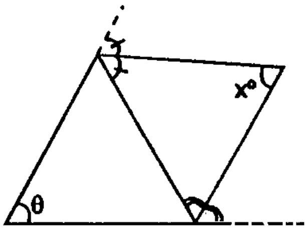
$$\boxed{x = \frac{\theta}{2}}$$



3° Propiedad

El menor ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos exteriores de un triángulo es igual al complemento de la mitad del tercer ángulo interior.

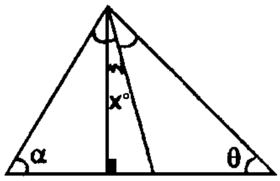
$$\boxed{x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}}$$



4° Propiedad

El menor ángulo formado por una altura y una bisectriz interior trazadas desde un vértice de un triángulo es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos interiores restantes.

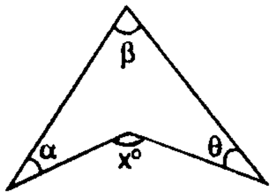
$$\boxed{x = \frac{\alpha - \theta}{2}}$$



Propiedades Auxiliares

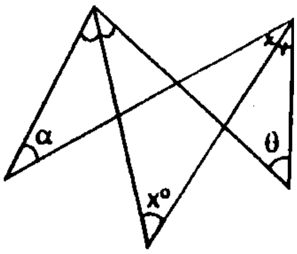
5° Propiedad

$$\boxed{x = \alpha + \beta + \theta}$$



6° Propiedad

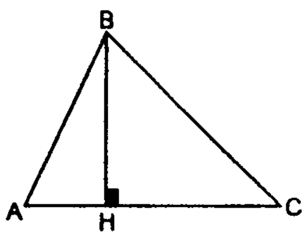
$$\boxed{x = \frac{\alpha + \theta}{2}}$$



7° Propiedad

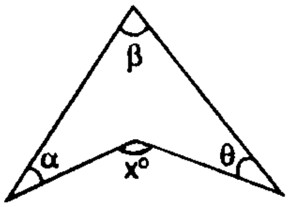
$\overline{BH}$: Altura

$$\boxed{\overline{BH} < \frac{AB + BC}{2}}$$



8° Propiedad

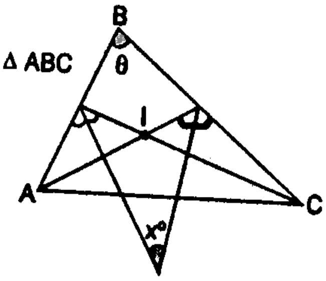
$\boxed{x = \alpha + \beta + \theta}$



9.

I → Incentro del Δ ABC

⇒ $\boxed{x = 45^\circ \ \frac{\theta}{4}}$

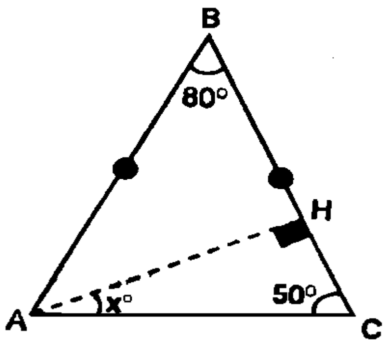


Ejercicios de aplicación

<u>Ejercicio 01</u>

En un triángulo Isósceles ABC (AB=BC) se traza la altura $\overline{AH}$. Calcular la m∠HAC, si m ∠B=80.

<u>Resolución</u>:



- En el triángulo isósceles ABC:

  m ∠A= m∠C= $\frac{180-80}{2} = 50$

- En el triángulo AHC: x + 50 = 90

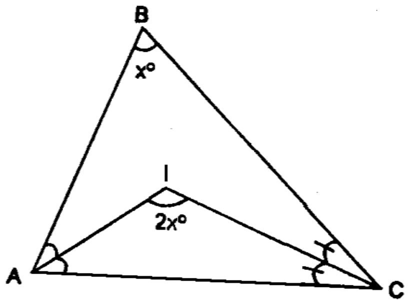
  $\boxed{x = 40}$

<u>Ejercicio 02</u>

En un triángulo ABC, m∠AIC = 2m∠B

Calcular la m∠B, si I es incentro del ΔABC.

<u>Resolución</u>:



- Como I es incentro del ABC, entonces $\overline{AL}$ y $\overline{CI}$ son bisectrices.
- Por propiedad 1:

$$2x = 90 + \frac{x}{2}$$

$$2x - \frac{x}{2} = 90$$

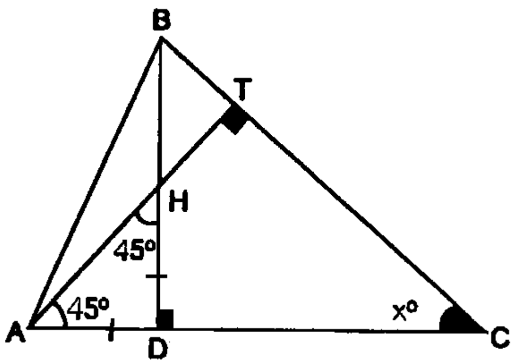
$$\frac{3x}{2} = 90$$

$$\therefore \boxed{x = 60}$$

Ejercicio 03

Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. La prolongación de $\overline{BH}$ intersecta en D a $\overline{AC}$,Calcular la m$\angle$C, si DH = AD.

Resolución:



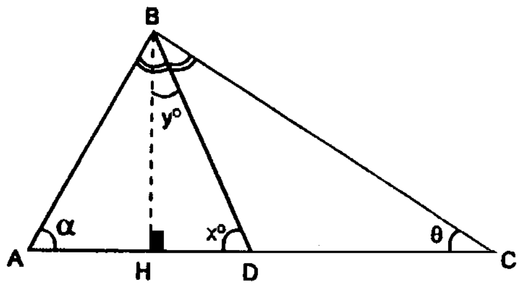
- Para determinar el ortocentro H del $\triangle$ABC, trazamos las alturas $\overline{BD}$ y $\overline{AT}$.
- En el ⊿ ADH; como AD=DH
  $\Rightarrow$ m$\angle$HAD = m$\angle$AHD = 45
- En el ⊿ ATC:45 + x = 90

$$\therefore \boxed{x = 45}$$

Ejercicio 04

En un $\triangle$ ABC: m$\angle$A,- m$\angle$C = 40. Se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Calcular m $\angle$ADB.

Resolución:



- Hacemos m∠A = α y m ∠C = θ.

  Luego: α - θ = 40 (dato)

* Trazamos la altura $\overline{BH}$ determinando el ∠HBD que por propiedad es:

$$y = \frac{\alpha - 0}{2} = \frac{40}{2} \Rightarrow y = 20$$

- En el ⊿ BHD:

  y + X = 90

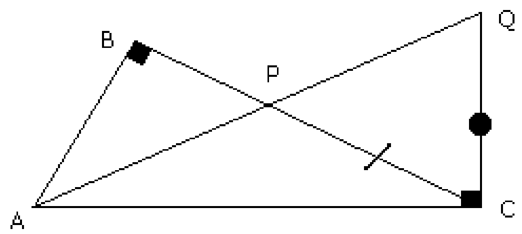
  20 + x = 90

  ∴ $\boxed{x = 70}$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Del gráfico adjunto deducir que línea notable, representa $\overline{AP}$ para el triángulo ABC; si PC = QC.

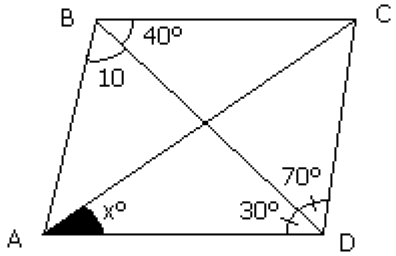


   Resolución:

2. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B; se trazan la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz interior $\overline{AD}$, las cuales se intersectan en P, si BP = 6 y DC = 13. Calcular BC.

   Resolución:

3. Del gráfico mostrado se pide calcular "x".



Resolución:

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la altura $\overline{BH}$. La bisectriz del ángulo HBC intersecta en P a $\overline{HC}$.

Si AB = 5. Calcular el máximo de valor entero de BP.

Resolución:

4. El ángulo A es un triángulo ABC. Mide 20, se traza la ceviana $\overline{CT}$ y en el triángulo ATC se traza la ceviana $\overline{TQ}$. Si m ∡ ATQ = 40 y TQ = QC = BC. Calcular la m ∡ B.

Resolución:

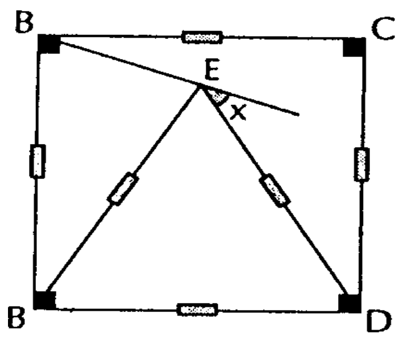
5. En un triángulo ABC: m∡ A = 80 y m∡ C = 40, "I" es el incentro de dicho triángulo. Se traza $\overline{IE} \perp \overline{BC}$. Calcular m∡BIE.

Resolución:

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

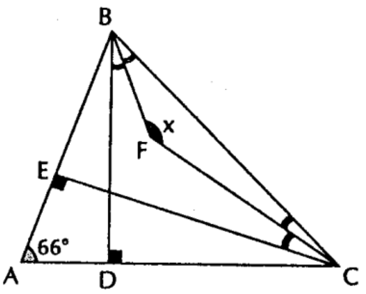
Encontrar "x"

1.



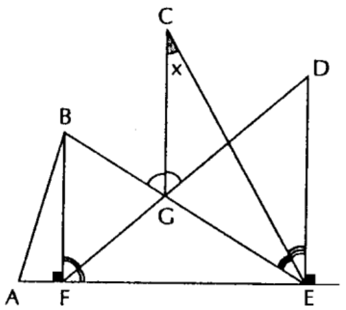
a) 30° b) 25° c) 19°
d) 21° e) N.A

2.



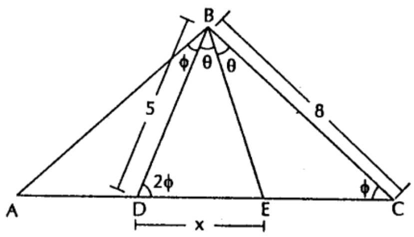
a) 127° b) 100° c) 58°
d) 147° e) 69°

3.



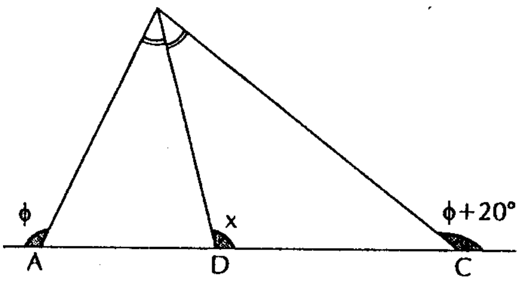
a) (22,5)° b) 42,5° c) 45°
d) 68° e) N.A

4.



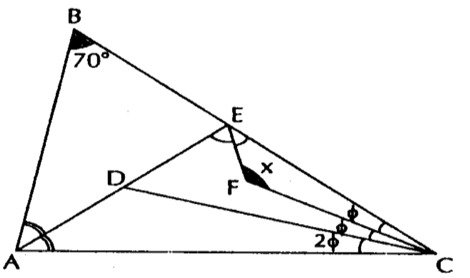
a) 1° b) 2° c) 3°
d) 4° e) 5°

5.



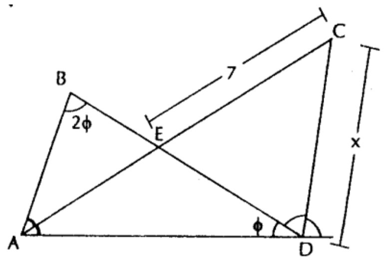
a) 120° b) 100° c) 105°
d) 48° e) 200°

6.



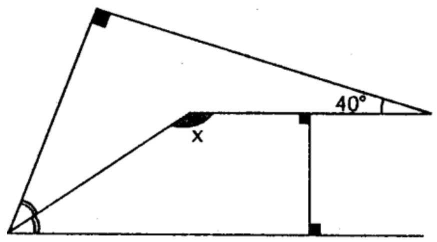
a) 120° b) (117,5)° c) 89°
d) 96° e) N.A

7.



a) 6° b) 7° c) 8
d) 9 e) N.A

8.

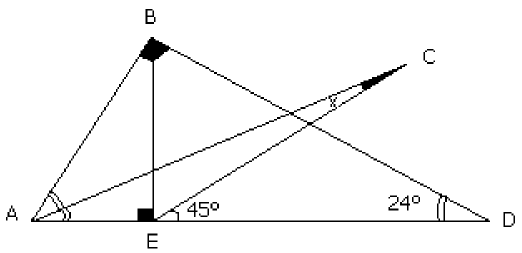


a) 155° b) 145° c) 136°
d) 3y

REFORZANDO

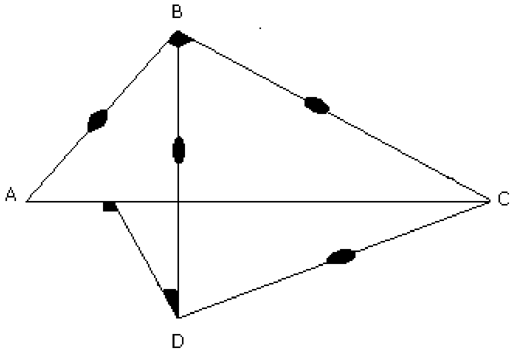
MIS CAPACIDADES

1. Calcular "x"



a) 10° b) 20° c) 12°
d) 32° e) 52°

2. Encontrar "x"



a) 15° b) 18° c) 25°
d) 34° e) 46°