IDENTIDADES DE ARCOS MULTIPLES

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MÚLTIPLES

A) F.T. del ángulo doble: $\boxed{F.T.(2\alpha)}$

$$\boxed{Sen2\alpha = 2Sen\alpha Cos\alpha}$$

$$\boxed{Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha}$$

$$\boxed{Sen^2\alpha=(1 - Cos2\alpha)/2}$$

$$\boxed{Cos^2\alpha=(1 + Cos2\alpha)/2}$$

$$\boxed{Tg2\alpha = \frac{2Tg\alpha}{1 - Tg^2\alpha}}$$

$$Ctg2\alpha = \frac{Ctg^2\alpha - 1}{2Ctg\alpha}$$

Ejemplo:

Hallar: Sen 2A, si Sen A = 2/3

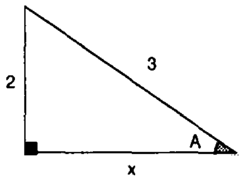
Solución:

Sabemos que:

$$\text{sen } 2A = 2 \text{ sen } A \cos A \qquad \ldots(I)$$

De la condición: $\boxed{\text{sen } A = \frac{2}{3}}$;

sen A = lo llevamos a un $\triangle$, veamos:



-Calculamos "x" por el teorema de Pitágoras:

$$3^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow 9 = 4 + x^2$$

$$5 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{5}}$$

Luego: $\cos A = \frac{x}{3} \Rightarrow \boxed{\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}}$

Reemplazamos valores en la expresión (I), obtenemos:

$\therefore$ $\boxed{\text{sen } 2A = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}}$ **Rpta.**

1. Si Cos a = 0,8. Calcular Sen 2a

2. Si Sen a = $\frac{12}{13}$. Calcular Cos 2a

3. Sabiendo que Sen a – Cos a = $\frac{1}{5}$. Calcular 2 Sen a . Cos a

4. Sabiendo que: Tan a = $\frac{1}{7}$ Tan b = $\frac{2}{11}$. Calcular Tan (2a + b)

5. Simplifica: $\frac{1+Sen\ 2a+Cos\ 2a}{1+Sen\ 2a-Cos\ 2a}$

6. Hallar el valor de M para que se cumpla la igualdad:

   M Tan A = $\frac{SenA+Sen2A}{1+CosA+Cos2A}$

7. Si Tan 37º = $\frac{3}{4}$.Hallar Sen 74º

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Si Sen y = $\frac{5}{13}$: y $\in$ II C.

   Calcular Cos 2y

   a) 119 b) 169 c) $\frac{119}{69}$

   d) $\frac{119}{19}$ e) $\frac{119}{169}$

2. Reducir:

   $Q = 1 - \frac{1}{Sec\ 2\theta}$

   a) 0 b) 2Sen^2 θ c) –Tan 2θ

   d) Senθ e) - $\frac{1}{2}$

3. Reducir:

   M = Cos^{4}θ - Sen^4 θ

   a) $\frac{1}{Sen\ \theta}$ b)-Cos^2 θ c) Cos 2θ d) 1 e) 1-Sec^2 θ

4. Reducir:

$P = \dfrac{1+Cos\ 2n}{Sen\ 2n}$

a) Sen n   b) Tan 2n   c) 1
d) Ctg n   e) –Ctg 2n

5. Si Sen θ = $\dfrac{8}{17}$.

Calcular U = 289 Sen 2θ

a) 240   b) 17   c) $\dfrac{17}{8}$
d) -144   e) 1

6. Siendo:

Sen b – Cos b = $\dfrac{1}{6}$. Hallar Sen 2b

a) $\dfrac{35}{36}$ b) 6   c) $\dfrac{-13}{18}$
d) $\dfrac{7}{36}$ e) 1

7. Si Cos y = $\dfrac{12}{13}$, Tan y < 0

Calcular Tan 2y

a) 1   b) $\dfrac{5}{13}$ c) $\dfrac{12}{13}$
d) -1   e) $\dfrac{-120}{119}$

8. Sabiendo que a y b son ángulos agudos tal que:

Sen a = $\dfrac{3}{5}$ Sen b = $\dfrac{8}{17}$

Calcular Ctg 2a + Ctg 2b

a) 2   b) 4   c) 6
d) 8   e) N.A.

9. Halla el valor de Cos 2a si   Sec a = $\dfrac{7}{3}$

a) $\dfrac{-31}{94}$ b) $\dfrac{-31}{49}$ c) $\dfrac{-27}{49}$
d) $\dfrac{31}{49}$ e) N.A.

10. Reducir:

$$E = \frac{Sen\ 2\alpha}{1 + Cos 2\alpha}$$

a) Cos 2α b) Tanα c) Sen α
d) Cos 2α e) Sec α

11. Hallar Tan 2A si Tan A = 3

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{-3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{-4}{3}$ e) N.A.

12. Demostrar: $\frac{Sen\ 4x}{1 - Cos\ 4x} = Ctg 2x$

B) F.T. del ángulo triple: $\boxed{\text{F.T.}(3\alpha)}$

$\boxed{Sen3\alpha = 3Sen\alpha - 4Sen^3\alpha}$

$\boxed{Sen^3\alpha = (3Sen\alpha - Sen3\alpha)/4}$

$\boxed{Cos3\alpha = 4Cos^3\alpha - 3Cos\alpha}$

$\boxed{Sen^3\alpha = (3Cos\alpha + Cos3\alpha)/4}$

$\boxed{Tg3\alpha = \frac{3Tg\alpha - Tg^3\alpha}{1 - 3Tg^2\alpha}}$

$\boxed{Ctg3\alpha = \frac{Ctg^3\alpha - 3Ctg\alpha}{3Ctg^2\alpha - 1}}$

$\boxed{Sen3\alpha = Sen\alpha(2Cos2\alpha + 1)}$

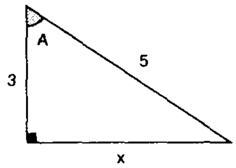
$\boxed{Cos3\alpha = Cos\alpha(2Cos2\alpha - 1)}$

$\boxed{\frac{Tg3\alpha}{Tg\alpha} = \frac{2Cos2\alpha + 1}{2Cos2\alpha - 1}}$

Ejemplo:
Hallar: Sen 3A, si Cos A = 3/5
<u>Solución:</u>

Sabemos que:
Sen 3A = 3Sen A – 4Sen^3 A ...... (I)
De la condición: Cos A = 3/5

Lo llevamos a un ⊿ tenemos:



Por el teorema de pitágoras:

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2$$

$$16 = x^2 \Rightarrow \sqrt{16} = x \Rightarrow \therefore \boxed{x = 4}$$

Luego: $\text{sen } A = \dfrac{x}{5} \Rightarrow \boxed{\text{sen } A = \dfrac{4}{5}}$

Reemplazamos valores en (I):

$$\text{sen } 3A = 3\left(\frac{4}{5}\right) - 4\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$\text{sen } 3A = \frac{12}{5} - 4\left(\frac{64}{125}\right) = \frac{300-256}{125} = \frac{44}{125}$$

$\therefore \boxed{\text{sen } 3A = \dfrac{44}{125}}$ **Rpta.**

CONSTRUYENDO
MIS CONOCIMIENTOS

1. Reducir:

$$M = \frac{Sen\ 3a}{Sen\ a} - \frac{Cos\ 3a}{Cos\ a}$$

2. Hallar Sen 3A, si Cos A = $\dfrac{3}{5}$

3. Si Tan α = $\dfrac{1}{2}$ Hallar Sen 3α

4. Si Sen α = $\dfrac{1}{3}$. Hallar Ctg 3α

5. Simplifica:

A = Cos^3a Cos3a + Sen^3a Sen3a

6. La expresión simplificada de:

$$\frac{1}{Tan3\alpha + Tan\alpha} - \frac{1}{Ctg3\alpha - Ctg\alpha}$$

7. Si α y β son complementarios y Sen $\alpha = \frac{2}{3}$. Hallar Cos 3β

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Calcula Tan 3θ si

   Cos $\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ donde $\theta \in$ II C

   a) $\frac{-2}{11}$ b) $\frac{2}{11}$ c) $\frac{-5}{11}$

   d) $\frac{5}{11}$ e) $\frac{-1}{5}$

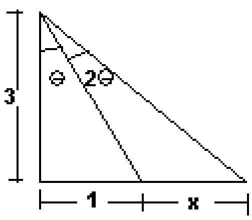
2. Si Tan x = 3
   Hallar el valor de Cos 3x

   a) $\frac{13\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{-13\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{-13\sqrt{10}}{50}$

   d) $\frac{13\sqrt{10}}{50}$ e) N.A.

3. Hallar x en la figura:

   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5



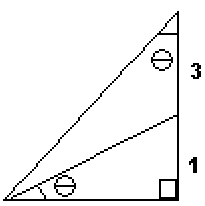
4. Si Sen $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha \in$ I C

   Hallar Sen3 α + Cos 3 α

   a) 0 b) 1 c) $\frac{2}{3}$

   d) $\frac{3}{4}$ e) N.A.

5. Hallar Ctg 3θ
   a) 2
   b) 11
   c) $\frac{11}{2}$
   d) $\frac{2}{11}$
   e) N.A.



6. La fórmula de: Sen3α en función de Senα es:
   a) 3 Senα - 4 $Sen^2α$
   b) 3 Senα - 4 $Sen^3α$
   c) 3 Senα
   d) 3 Senα + 4 $Sen^3α$
   e) 3 Senα + 4 $Sen^2α$

7. La fórmula de Cos 3α en función de Cos α es:
   a) 3 Cos α
   b) 3 $Cos^3α$ + 4 Cos α
   c) 4 Cosα - 3 Cos^3 α
   d) 4Cos^2 α - 3 Cosα
   e) 4Cos^3α - 3 Cosα

8. Si Tan 3x = $\dfrac{(3Tanx - Tan^3x)}{1-k}$

   Entonces k es:
   a) Tan^2 x
   b) 3 Tan^2 x
   c) 2 Tan^2 x
   d) 3 Tan x
   e) 2 Tan^3 x

9. Sabiendo que:

   Tan (15º + x) = $\dfrac{2}{3}$.

   Calcular M = Tan 3x

   a) $\dfrac{55}{37}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) $\dfrac{3}{5}$
   d) $\dfrac{55}{35}$ e) $\dfrac{37}{55}$

10. Reducir:

    P = 3Cgt $\left(\dfrac{3\alpha}{2}\right) + \dfrac{4Sen\alpha}{1+2Cos\alpha}$

    a) $\dfrac{\alpha}{2}$ b) α c) -2
    d) 0 e) N.A.

C) F.T. del ángulo mitad: F.T.(α/2)

$$\text{Sen}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{(1 - \text{Cos}\alpha)}{2}}$$

$$\text{Cos}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{(1 + \text{Cos}\alpha)}{2}}$$

$$\text{Tg}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{(1 - \text{Cos}\alpha)}{(1 + \text{Cos}\alpha)}}$$

Nota: El signo + ó – que tenga la F.T. (α/2) dependerá del cuadrante en que se encuentre el ángulo mitad.

$$\text{Tg}(\alpha/2) = \text{Csc}\alpha - \text{Ctg}\alpha$$

$$\text{Ctg}(\alpha/2) = \text{Csc}\alpha + \text{Ctg}\alpha$$

D) Identidades Auxiliares

$$\text{Sen } x \text{ Sen}(60° - x) \text{ Sen}(60° + x) = \frac{1}{4}\text{Sen}3x$$

$$\text{Cos } x \text{ Cos}(60° - x) \text{ Cos}(60° + x) = \frac{1}{4}\text{Cos}3x$$

$$\text{Tg } x \text{ Tg}(60° - x) \text{ Tg}(60° + x) = \text{Tan } 3x$$

$$\text{Ctg } x \text{ Ctg}(60° - x) \text{ Ctg}(60° + x) = \text{Ctg}3x$$

EJEMPLO:

Si Cos x = $\frac{1}{2}$ **Calcular Sen** $\frac{x}{2}$ **x ∈ II C**

Resolución:

$$\text{Sen }\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - Cosx}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$

$$\text{Sen }\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

TRIGONOMETRIA

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Si: Cos $\theta = \frac{12}{13}$ $270º < \theta < 360º$

   Calcular: Sen $\frac{\theta}{2}$

2. Utilizando las identidades del ángulo mitad. Hallar Cos 105º
3. Calcular el valor de:

   $E = \text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 5Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

   $\alpha \in$ III C y Sen $\alpha = \frac{-12}{13}$

4. Si Cos a = 0,6. Calcular Sen $\left(\frac{a}{2}\right)$

5. Si Cos a = $\frac{1}{9}$. Calcula Cos$\left(\frac{a}{2}\right)$

   Si a $\in$ IV C

6. Simplifica:

   $E = \dfrac{Ctg\left(\frac{a}{2}\right) - Tan\left(\frac{a}{2}\right)}{Csc2a + Ctg2a}$

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Sabiendo que a y b son ángulos agudos tales que:
   Sen a = 3/5 y Sen b = 8/17,
   calcula: Ctg (a/2) + Ctg (b/2)

   a)4 b)3 c)5 d)7 e)N.A.

2. Halla el valor de Cos2a, si Seca=7/3

   a)-31/94 b)-31/49 c)-27/49
   d)31/49 e)N.A.

3. Halla el valor de Ctg2a; si Tga=5/12

   a)119/102 b)191/120 c)117/120
   d)1119/120 e)N.A.

4. Halla el equivalente de $Cos^4x - Sen^4x$

   a)Sen2x b)Tg2x c)Cos2x
   d)Ctg2x e)N.A.

5. Halla el equivalente de:
   $(1 - Tg^2\alpha)/(1 + Tg^2\alpha)$

   a)$Sen2\alpha$ b)$Tg2\alpha$ c)$Cos2\alpha$
   d)$Ctg2\alpha$ e)N.A.

6. Reduce lo siguiente: $Q=Tg(45^o+x)+Tg(45^o-x)$

   a)2 b)Tg2x c)Ctg2x
   d)2Sec2x e)2Ctg2x

7. Si: $Sen^4\alpha + Cos^4\alpha = m$, halla $Cos4\alpha$

   a)4m b)3m c)2m-3
   d)4m-3 e)3m-4

8. Reducir la expresión:
   $$E = \frac{Sen2\alpha}{1 + Cos2\alpha}$$

   a)Tg2x b)Tgx c)Senx
   d)Cos2x e)Secx

9. Reducir la expresión:
   $R=4Sen\theta Cos^3\theta(1-Tg^2\theta)$

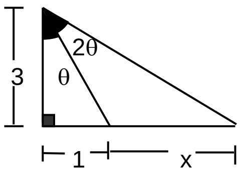
   a)$Sen2\theta$ b)$Sen^2 2\theta$ c)$Cos2\theta$
   d) $Cos^2 2\theta$ e)$Sen4\theta$

10. Si $Sen\alpha=1/2$ y $\alpha \in IC$, halla $Sen3\alpha + Cos3\alpha$

    a)0 b)1 c)2/3 d)3/4 e)N.A.

11. En la figura halla x

    a) 1
    b) 2
    c) 3
    d) 4
    e) 5



12. Halla el valor de Cos3x, si Tgx=3

    a)$\frac{13\sqrt{10}}{10}$ b)$\frac{-13\sqrt{10}}{10}$ c)$\frac{-13\sqrt{10}}{50}$
    d)$\frac{13\sqrt{10}}{50}$ e)N.A.

13. Reducir: $\frac{Sen\ 3a + Sen^3a}{Cos^3a - Cos3a}$

    a)1 b)Tga c)Ctga
    d)Tg3a e)Ctg3a

14. Halla Cos(A/2), sabiendo que:
    Cos A = 3/4 y A $\in$ IVC

    a)$-\sqrt{2}/4$ b)$\sqrt{7}/7$ c)$\sqrt{2}/2$ d)$\sqrt{2}/3$ e)$\sqrt{2}/6$

15. Halla Tg(A/2), sabiendo que:
Cos A =-5/13 y A $\in$ IIIC

a)3/2 b)2/3 c)-2/3
d)-3/2 e)N.A.

16. Simplifica: R=Csc3α(Tgα+Tg2α+TgαTg2αTg3α)

a)Sec2α b)Sec3α c)Csc2α
d)Csc3α e)N.A.

17. Si: Sen A = 2/3, Halla Sen 2a.

a)$3\sqrt{5}/5$ b)4/7 c)7/15
d)$4\sqrt{5}/9$ e)N.A.

TRANSFORMACIÓN DE UNA SUMA O DIFERENCIA DE F.T. EN PRODUCTO O COCIENTE

A) Suma o diferencia de Senos:

$$\text{Sen}\alpha \pm \text{Sen}\beta = 2\text{Sen}[(\alpha \pm \beta)/2] \bullet \text{Cos}[(\alpha \mp \beta)/2]$$

Si A + B + C = 180°
Entonces:

$$\text{Sen A} + \text{Sen B} + \text{Sen C} = 4\text{Cos}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2}$$

$$\text{Sen A} + \text{Sen B} - \text{Sen C} = 4\text{Sen}\frac{A}{2}\,\text{Sen}\frac{B}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2}$$

B) Suma o diferencia de Cosenos:

$$\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta = 2\text{Cos}[(\alpha + \beta)/2] \bullet \text{Cos}[(\alpha - \beta)/2]$$

$$\text{Cos}\alpha - \text{Cos}\beta = -2\text{Sen}[(\alpha + \beta)/2] \bullet \text{Sen}[(\alpha - \beta)/2]$$

Si A + B + C = 180°
Entonces:

$$\text{Cos A} + \text{Cos B} + \text{Cos C} = 4\text{Sen}\frac{A}{2}\,\text{Sen}\frac{B}{2}\,\text{Sen}\frac{C}{2} + 1$$

$$\text{Cos A} + \text{Cos B} - \text{Cos C} = 4\text{Cos}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Sen}\frac{C}{2} - 1$$

C) Suma o diferencia de Tangentes:

$$\text{Tg}\alpha \pm \text{Tg}\beta = \frac{\text{Sen}(\alpha \pm \beta)}{\text{Cos}\alpha \bullet \text{Cos}\beta}$$

Si A + B + C = 180°
Entonces:

$$\boxed{Tg\ A + Tg\ B + Tg\ C = TgA \bullet TgB \bullet TgC}$$

D) Suma o diferencia de Cotangentes:

$$Ctg\alpha \pm Ctg\beta = \frac{Sen(\beta \pm \alpha)}{Sen\alpha \bullet Sen\beta}$$

E) Suma o diferencia de Secantes:

$$Sec\alpha + Sec\beta = \frac{2Cos[(\alpha+\beta)/2] \bullet Cos[(\alpha-\beta)/2]}{Cos\alpha \bullet Cos\beta}$$

$$Sec\alpha - Sec\beta = \frac{2Sen[(\alpha+\beta)/2] \bullet Sen[(\alpha-\beta)/2]}{Cos\alpha \bullet Cos\beta}$$

F) Suma o diferencia de Cosecantes:

$$Csc\alpha \pm Sec\beta = \frac{2Sen[(\alpha\pm\beta)/2] \bullet Cos[(\alpha\mp\beta)/2]}{Sen\alpha \bullet Sen\beta}$$

I- EJEMPLOS

1. Transforma a producto las siguientes expresiones:
   a) Sen 18° + Sen 4°
   b) Sen 7° – Sen 5°
   c) Cos 5° + Cos 3°
   d) Cos 20° – Cos 42°

Solución:

a) Sen 18° + Sen 4° =

$$2\ sen\left(\frac{18° + 4°}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{18° - 4°}{2}\right)$$

$$\therefore\ \underline{sen\ 18° + sen\ 4° = 2\ sen\ 11°\ cos\ 7°}$$

b) Sen 7° – Sen 5° =

$$2\ cos\left(\frac{7° + 5°}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{7° - 5°}{2}\right)$$

$$\therefore\ \underline{sen\ 7° - sen\ 5° = 2\,cos\ 6°\ sen\ 1°}$$

c) Cos 5° + Cos 3° =

$$2\ cos\left(\frac{5° + 3°}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{5° - 3°}{2}\right)$$

$$\therefore\ \underline{cos\ 5° + cos\ 3° = 2\ cos\ 4°\ cos\ 1°}$$

d) Cos 20° – Cos 42° =

$$2\ \text{sen}\left(\frac{42° + 20°}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{42° - 20°}{2}\right)$$

$\therefore$ $\boxed{\cos 20° - \cos 42° = 2\ \text{sen}\ 31°\ \text{sen}\ 11°}$

2. Reducir: $Q = \dfrac{\text{Sen } 3\alpha + \text{Sen } \alpha}{\text{Cos } 3\alpha + \text{Cos } \alpha}$

Solución

Aplicando se obtiene:

$$Q = \frac{\cancel{2}\ \text{sen}\left(\frac{3\alpha + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - \alpha}{2}\right)}{\cancel{2}\ \cos\left(\frac{3\alpha + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - \alpha}{2}\right)} \quad Q = \frac{\text{sen } 2\alpha \cdot \cancel{\cos \alpha}}{\cos 2\alpha \cdot \cancel{\cos \alpha}}$$

$$Q = \frac{\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \text{tg } 2\alpha$$

3. Calcular:

E = Sen 20°.Cos 10° + Cos 50°.Sen 40°

Solución

Para que ambos miembros tengan la forma de las expresiones estudiadas multiplicamos ambos miembros por 2:

2E=2Sen20°.Cos10°+2Cos50°.Sen40°

Utilizando transformaciones de producto a suma tenemos:

2E= Sen(20°+10°) + Sen(20° - 10°)
+ Sen(50°+ 40°) – Sen(50°– 40°)

$2E=\text{Sen}30°+\cancel{\text{Sen}10°}+\text{Sen}90° -\cancel{\text{Sen}10°}$

2E= 1/2+ 1 = 3/2 ⇒ E = **3/4**

4. Transformar en cociente:

a) Tg 18° – Tg 57°
b) Ctg70° – Ctg 85°
c) Sec50° + Sec36°
d) Csc25° – Csc45°

Solución

a) $\text{Tg } 18° - \text{Tg } 57° = \dfrac{\text{Sen}(18°-57°)}{\text{Cos}18°.\text{Cos}57°} = \dfrac{\mathbf{-Sen\ 39°}}{\mathbf{Cos18°.Cos57°}}$

b) $\text{Ctg}70° - \text{Ctg } 85° = \dfrac{\text{Sen}(85°-70°)}{\text{Sen}70°.\text{Sen}85°} = \dfrac{\mathbf{Sen\ 15°}}{\mathbf{Sen70°.Sen85°}}$

c) Sec50° + Sec36° =

$$\frac{2\text{Cos}[(50°+36°)/2].\text{Cos}[(50°-36°)/2]}{\text{Cos}50°.\text{Cos}36°}$$

$$= \frac{\mathbf{2Cos\ 43°.Cos\ 7°}}{\mathbf{Cos50°.Cos36°}}$$

PONTE MOSCA

Recordando:

Sen (α + β) = Senα Cosβ + Cosα Sen β

Sen (α - β) = Senα Cosβ - Cosα Sen β

A partir de estas formas generales obtendremos:

$$\boxed{\text{Sen a + Sen b = 2Sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)Cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

Si tomamos en cuenta:

Sen (α + β) y Sen (α - β)

Sumamos (1) y (2) obtendremos

Sen (α + β) + Sen (α -β) = 2 Senα Cosβ

Efectuamos el siguiente cambio de variables:

α + β = a

α - β = b

Quedándose nuestra expresión así:

$$\boxed{\text{Sen a + Sen b = 2Sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)Cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

Recuerda que:

Sen 10º = Cos 80º

Sen 70º = Cos 20º

Cos 1 = Sen 89

Cos 63 = Sen 27

TRIGONOMETRIA

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Transformar a producto:
   Sen 11x + Sen 7x

2. Simplificar:
   Cos 20º + Sen 50º
3. Simplificar
   y = (Sen 33º+Sen 3º) / Cos 33º+Cos 3º
4. Simplificar:
   $$\frac{Sen 4x + Sen 2x}{Cos 4x - Cos 2x}$$
5. Simplificar:
   $$\frac{Cos 10° - Cos 90°}{Sen 50°.Sen 40°}$$
6. Factorizar:
   Sen 12x + Sen 4x + Cos 4x

7. Simplifica:
   $$\frac{Sen\theta + Sen 2\theta + Sen 3\theta}{Cos\theta + Cos 2\theta + Cos 3\theta}$$
8. Calcular:
   Sen 67,5º . Sen 22,5º

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Reducir:
   E = Tan 25º + Tan 40º
   Utilizando transformaciones

   a) Csc 25º b) Sec 40º c) Ctg 65º d) Tan 65º e)N.A.

2. Transformar a producto:
   Sen 12x + Sen 6x

   a) 2 Sen 9x Cos 3x b) 2 Sen 3x Cos9x
   c) 2 Sen 6x Cos 3x d) 2 Sen 6x Cos9x
   e) N.A.

3. Transformar a producto
   Cos 24º - Cos 18º

   a) -2Sen 21º Sen 3º b) 2Sen 3º Sen 21º c) -2Sen 3º Cos 21º d) Sen 21º Sen 3º
   e) N.A.

4. Simplificar:
   Cos 10º + Sen 40º

   a) Cos 20º b) $\sqrt{2}$ Cos 20º
   c) $\sqrt{3}$ Cos 20º d) Cos 20º e)N.A.

5. Simplificar:
   E = Sen 70º + Sen 50 Si Cos 10º=x

   a) $\frac{x}{2}$ b) $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ c) x $\sqrt{3}$
   d) 2x e)N.A.

6. Simplificar:
   y = $\frac{Sen75º-Sen15º}{Cos75º+Cos15º}$

   a) $\sqrt{3}$ b) 3 $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

   d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) N.A.

7. Simplificar:
   $\frac{Cos\alpha - Cos3\alpha}{Sen3\alpha - Sen\alpha}$
   a) Ctg 2α b) Tan 2α c) Sec 2α
   d) Sen 2α e) N.A.

8. Factorizar:
   Senx + Sen 2x + Sen 3x

   a) Sen 2x (Cosx + 1)
   b) Sen 2x(2Cosx+1)
   c) 2Senx (Cosx - 1)
   d) 2 Sen 2x(Cosx + 1)
   e) N.A.

9. Transformar en producto:
   a) Sen 20º + Sen 40º
   b) Cos 46º + Cos 44º
   c) Cos 36º - Cos 14º
   d) Sen 52º - Cos 8º
   e) Sen 26º + Cos 64º

10. Transformar a producto:
    Cos 36º - Cos 12º
    a) -2Cos 24º Cos 12º
    b) 2 Cos 24 Cos 12º
    c) -2 Sen 24º Sen 12º
    d) 2Sen 24º Sen 12º
    e) N.A.

TRANSFORMACIÓN DE UN PRODUCTO DE F.T. EN UNA SUMA O DIFERENCIA

A) Producto de Senos y/o Cosenos:

$$\boxed{2Sen\alpha \bullet Cos\beta = Sen(\alpha + \beta) + Sen(\alpha - \beta)}$$

$$\boxed{2Cos\alpha \bullet Cos\beta = Cos(\alpha + \beta) + Cos(\alpha - \beta)}$$

$$\boxed{2Sen\alpha \bullet Sen\beta = Cos(\alpha - \beta) - Cos(\alpha + \beta)}$$

B) Producto de Tangentes y/o Cotangentes:

$$\boxed{Tg\alpha \,.\, T \;\; |\rho T \, \frac{Cos(\alpha - \beta) - Cos(\alpha + \beta)}{Cos(\alpha + \beta) + Cos(\alpha - \beta)}}$$

$$\boxed{Ctg\alpha \,.\, Ctg\beta = \frac{Cos(\alpha + \beta) + Cos(\alpha - \beta)}{Cos(\alpha - \beta) - Cos(\alpha + \beta)}}$$

$$\boxed{Tg\alpha \bullet Ctg\beta = \frac{Sen(\alpha + \beta) + Sen(\alpha - \beta)}{Sen(\alpha + \beta) + Sen(\beta - \alpha)}}$$

EJEMPLOS

1. Expresa como suma o diferencia, según convenga las siguientes expresiones:

   a) 2Sen 30°. Cos 6°
   b) 2Sen 10°. Sen 40°
   c) 2Cos 50°. Cos 10°

Solución:

a) 2Sen 30°. Cos 6° =
   Sen(30°+6°) + Sen(30° – 6°)
   ∴ 2Sen 30°. Cos 6° **= Sen36° +Cos24°**

b) 2Sen 10°. Sen 40° =
   Cos(10° – 40°) – Cos(10° + 40°)=
   Cos(– 30°) – Cos 50°

∴ 2Sen 10°. Sen 40° **= Cos30°– Cos50°**

c) 2Cos 50°. Cos 10° =
   Cos(50° + 10°) + Cos(50° – 10°) =

∴ 2Sen 10°. Sen 40° **= Cos60°+ Cos40°**

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Siendo θ = 60º. Hallar

   Sen $\left(\frac{5\theta}{4}\right).Cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$

2. Calcular Sen 67º,5 . Sen 22,5º
3. Hallar:

$$\frac{Sen75^{\circ} \,.\, Sen15^{\circ}}{Cos60^{\circ}}$$

4. Hallar el valor de:
   F = Cos 20º . Cos 40º . Cos 80º
5. Expresar en forma de suma o diferencia:
   2 Cos $\left(\frac{11x}{2}\right).Cos\left(\frac{x}{2}\right)$
6. Simplificar:
   M = Sen 20º . Sen 50º + Cos 50 . Cos 80º + Sen 80º . Sen 10º

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Simplificar:
   F = 4 Sen x . Sen (60 + x) Sen (60-x)

   a) Tan 3x b) Ctg 3x c) Cos 3x
   d) Sen 3x e)N.A.

2. Transformar en suma o diferencia:
   Sen 7x . Cos 12x

   a) $\frac{Cos19x + Cos5x}{2}$
   b) $\frac{Cos19x - Cos5x}{2}$
   c) $\frac{Sen19x + Sen5x}{2}$
   d) $\frac{Sen19x - Sen5x}{2}$
   e)N.A.

3. Si Cos (α + β) = $\frac{2}{3}$ y Cos (α - β)= $\frac{2}{5}$

   Calcular:
   T = Tanα . Tanβ - Ctgα .Ctgβ

   a) $\frac{17}{4}$ b) $\frac{15}{4}$ c) $\frac{-17}{4}$
   d) $\frac{-15}{4}$ e) N.A.

4. Transformar en suma las siguientes expresiones:
   a) Sen 22º . Sen 28º
   b) Sen 34º . Cos 26º
   c) Sen 54º . Cos 36º
   d) Sen 3α . Cosα
   e) Cos 4α . Sen 2α

5. En un triángulo ABC se sabe que:

Tan $\left(\frac{A}{2}\right).Tan\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Sec c = $\frac{1}{3}$

Hallar Sen A + SenB

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$
d) 1 e) $\frac{5}{6}$

6. Reducir:
M = 2Cos x . Cos 2x . Cos4x . Cos8x

a) $\frac{Senx}{Cosx}$ b) $\frac{Sen5x}{5Senx}$ c) $\frac{Sen16x}{8Senx}$
d) Sen x e) N.A.

7. Reducir:
N = 2Cos 6x Sen 3x + Sen 3x

a) Sen 5x b) Sen 6x c) Sen 9x
d) 0 e) N.A.

8. Transformar en suma:

a) 2 Sen 40º . Cos 4º
b) 2 Cos 42º . Sen 7º
c) 2 Sen 6º . Sen 3º
d) 2 Cos 28º Cos 13º
e) 2 Sen 4x Cos 12x

9. De la figura adjunta:

Hallar PM + BN siendo:
AP = 1 PB = 2

a) $\sqrt{2}$ Cos 20º
b) Cos 20º
c) $\sqrt{3}$ Sen 20º
d) 0º
e) $\sqrt{3}$ Cos 20º