



FICHAS DE FACTORIZACIÓN I

Es la transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.

Ejemplo:

$$\underbrace{x^2 + 9x - 22}_{\text{suma algebraica}} = \underbrace{(x - 2)(x + 11)}_{\text{factores primos}}$$

NOTA: Factor primo es aquel que es divisible por la unidad y por sí mismo.

POLINOMIO PRIMO O IRREDUCTIBLE.

Análogamente a los números primos, existen polinomios que no admiten factores. Tales clases de polinomios, de grado mayor que cero, sólo son divisibles por sí mismos y una constante no nula; éstos reciben el nombre de polinomios primos o irreducibles.

Ejemplos:

- $x+13$
- $2x$
- x^2+1
- x^3+9
- $3x-1$

OBSERVACIÓN: La factorización se realiza en el conjunto de las expresiones algebraicas racionales enteras respecto a la variable y respecto a los coeficientes en el conjunto de los números racionales, aunque en éste último caso puede existir alguna reconsideración en abandonar el conjunto racional (Q).

POLINOMIO DEFINIDO SOBRE UN CAMPO NUMÉRICO

Un polinomio está definido sobre un campo numérico, si todos sus coeficientes pertenecen a dicho campo, sólo vamos a considerar 3 campos numéricos: Q, R y C.

Ejemplos:

- En el polinomio:

$$P(x) = 4x^3 - \frac{2x^2}{3} + 5x - 7, \text{ se tiene:}$$

$$\left\{4; -\frac{2}{3}; 5; -7\right\} \subset \mathbb{Q}$$

Es decir, todos sus coeficientes son racionales, por tanto P está definido sobre Q.

- En el polinomio:

$$F(x,y) = x^3 + \sqrt{2}x^2y + 2xy^2 + \pi, \text{ se tiene:}$$

$$\{1; \sqrt{2}; 2; \pi\} \subset \mathbb{R}$$

- En el polinomio:

$$G(x,y) = -5x^2 + \sqrt{3}ix^3 + xy^9 \text{ se tiene:}$$

$$\{-5; \sqrt{3}i; 1\} \subset \mathbb{C}$$

FACTOR O DIVISOR ALGEBRAICO

Todo polinomio no constante, que divide exactamente a otro polinomio se llama factor o divisor algebraico.

Ejemplo: $P(x)=x-1$ es un factor algebraico de $F(x)=x^2-1$; pues la división:

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \text{ es exacta}$$

NÚMERO DE FACTORES PRIMOS (F.P)

El número de factores primos de un polinomio se obtienen contando el número de factores basales, es decir los factores que se encuentren como base de una potencia y que contengan a la variable.

Nota: Para realizar el conteo no se debe considerar el número de veces que actúa un determinado factor.

Ejemplos:

- $P(x)=(x+3)^2(x^3+2)^7(2x-1)$

Nº de factores primos es 3

- $Q(x)=3^6(x+5)(x^4+1)^3$

Nº de factores primos es 2

- $R(x,y)=x^3y^3(x+2y)^5(x-3y)^4$

Nº de factores primos es 4

NUMERO DE FACTORES TOTALES

Sea: $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ donde a, b, c son primos entre sí:

$$\text{Nº Factores} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

Ejemplo: Determinar el número de factores de:

$$P(x,y)=(2x-y)^2(x+y)^3(a^2+b^2)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Nº Factores} &= (2+1)(3+1)(2+1) \\ &= 36 \text{ factores} \end{aligned}$$

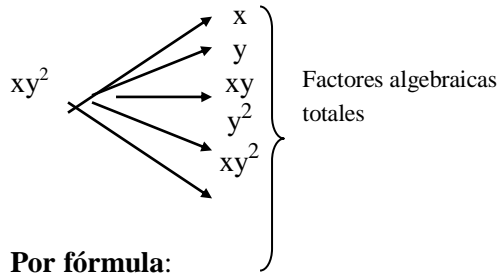
NÚMERO DE FACTORES ALGEBRAICOS O DIVISORES ALGEBRAICOS

Un polinomio factorizado presenta una cantidad determinada de factores algebraicos, es decir expresiones que lo dividen en forma exacta en el cual no se considera a ninguna constante.

Sea: $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ donde a, b, c son primos entre si:

$$\text{Nº Factores} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)-1$$

Ejemplo: Determinar el número de factores de:



Por fórmula:

$$\begin{aligned} \text{N}^\circ \text{ Factores algebraicos} &= (1+1)(2+1)-1 \\ &= (2)(3)-1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

NUMERO DE FACTORES COMPUESTOS O DIVISORES COMPUESTOS

F.C. Factores Compuestos	=	F.A. Factores Algebraicos	-	F.P. Factores Primos
---------------------------------------	---	--	---	-----------------------------------

Ejemplo: $P_{(x,y)}=x^2y^3$

- Factores primos = 2
- Factores totales = 12
- Factores algebraicos = $(2+1)(3+1)-1=11$
- Factores compuestos = $11-2=9$

METODOS DE FACTORIZACIÓN

Son técnicas a utilizar, de acuerdo a la forma que presente el polinomio.

I. Método del factor común y/o agrupación de términos.

Para aplicar este método tendremos en cuenta lo siguiente:

- Observar si toda la expresión tiene uno o más factores comunes, si estuviesen elevados a exponentes, se extrae el que está elevado al menor.
- Si la expresión no tuviera factores comunes, éstos se consiguen agrupando términos y el número de términos que se reúnen dependen del número de términos del polinomio dado.
- Se extrae el factor común y el otro factor se determina dividiendo cada uno de los términos del polinomio entre el factor común extraído.

Ejemplo:

1. Factorizar: $P(x)=4x^4+5x^2$

Resolución:

El factor común es: x^2

$$\Rightarrow P(x) = x^2(4x^2+5)$$

2. Factorizar: $P_{(x,y)}=x^3(x+y)+5xy(x+y)$

Resolución:

El factor común es: $x(x+y)$

$$\Rightarrow P_{(x,y)}=x(x+y)(x^2+5y)$$

3. Factorizar:

$$P_{(x,y)} = a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$$

Resolución:

$$P_{(x,y)} = a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$$

$$P_{(x,y)} = a^2(x-2y) - ax(x-2y) + x^2(x-2y)$$

$$P_{(x,y)} = (x-2y)(a^2 - ax + x^2)$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Factorizar: $(x-3)(x+2)(x-5) + (x-3)(x-2) - 3(x-3)$

Resolución:

Rpta. $(x-3)(x-5)(x+3)$

2. Factorizar:

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)$$

Resolución:

Rpta. $(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2)$

3. Factorizar:

$$x(z-y)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 + 8xyz$$

Resolución:

Rpta. $(z+y)(y+x)(z+x)$

4. Señale el término independiente de x, y, z de un factor primo de:

$$xyz^3 + 8yz^2 - 8y^2z^3 + x^2yz + 8xy - x^2 - 8xy^2z - xz^2$$

Resolución:

Rpta. -1

5. Indique un divisor de:

$$a^4bc + ab^4c + abc^4 - b^3c^3 - a^3c^3 - a^3b^3$$

Resolución:

Rpta. $(c^2 - ab)$

6. Factorizar:

$$18axy^3 - 54axy^2 + 18ay^3 - 54ay^2 + 18axy + 18ay - 54ax - 54a$$

Resolución:

Rpta. $18a(x+1)(y-3)(y^2+1)$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Factorizar:

$$x^{p+q} + x^p y^q + x^q y^p + y^{p+q}$$

a) $(x^q + y^q)(x^p + y^p)$

b) $(x^q + y^q)(x^p - y^p)$

c) $(x^p + y^q)(x^q + y^p)$

d) $(x^q - y^q)(x^p + y^p)$

e) N.A.

2. Hallar la raíz cuadrada de:

$$(a^2 + ab + bc + ca)(bc + ca + ab + b^2)(bc + ca + ab + c^2)$$

- a) $(a+b)(b+c)(a-c)$
- b) $(a+b)(b+c)(a+c)$
- c) $(a+c)(b+c)(a+b^2)$
- d) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)$
- e) N.A.

3. Factorizar e indicar uno de sus factores primos: $x^{n+2} + x^n + x^3 - x^2 + x - 1$

- a) $x^2 - 1$
- b) $x^2 + 1$
- c) $x^3 + 1$
- d) $x^3 - 1$
- e) N.A.

4. Factorizar e indicar uno de sus factores primos:

$$3x^3yz - 2x^2y^2 - 6x^2z^2 - 9xy^2z + 4xyz + 6y^3$$

- a) $(3xz + 2y)$
- b) $3xy$
- c) $2y$
- d) $(3xz - 2y)$
- e) N.A.

5. Factorizar e indicar uno de sus factores primos:

$$abx^3 + b^2x^2 - a^2x^2 - a^2bx + abx + a^3$$

- a) $(bx + a)$
- b) $(x+a)$
- c) $(x - a)$
- d) $(bx - a)$
- e) N.A.

6. Factorizar:

$$6x^3(n-1)^3 - 12x^2(n-1)^4 + 9x^4(n-1)^2$$

e indicar uno de sus factores:

- a) x
- b) x^2
- c) x^3
- d) x^4
- e) x^5

7. Factorizar:

$$3m(a-b+c) - 2n(b-a-c)$$
 e indicar uno de sus factores:

- a) $(a+b)$
- b) $(a-b+c)$
- c) $(a+b+c)$
- d) $(m+n)$
- e) $(3m+4n)$

8. Indique uno de los factores al factorizar:

$$(mx + ny + pz)^2 + (my - nx)^2 + (nz - py)^2 + (px - mz)^2$$

- a) $(x+y)$
- b) $(x+z)$
- c) $(x+y+z)$
- d) $(x^2 + y^2 + z^2)$
- e) $(m+n+p)$

9. Indique uno de los factores al Factorizar:

$$(a^3 + b^3 + c^3)abc + a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 + 2a^2b^2c^2$$

- a) $(a+b)$
- b) $(a+b+c)$
- c) $(a^2 + b + c)$
- d) (b^2+ac)
- e) $(a^2 + b^2 + c^2)$

ALGEBRA

10. Indique uno de los factores al Factorizar:

$$(a^2 - b^2)^2 (c^2 - d^2) + 4a^2 b^2 c^2$$

a) (a^2+b^2)

b) (b^2+c^2)

c) (c^2+a^2)

d) $(a+b+c)$

e) $(a^2c+b^2c+a^2d-b^2d)$