



FICHA DE LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

Al finalizar el presente capítulo Ud. será capaz de:

1. Conocer el concepto de Circunferencia Trigonométrica, así como sus elementos.
2. Identificar las líneas trigonométricas en cada cuadrante, así como sus variaciones.
3. Resolver problemas.

En los capítulos anteriores se estudiaron las razones trigonométricas de ángulos; existe, sin embargo, otro concepto muy importante el de las razones trigonométricas de números reales. La diferencia principal entre ambos conceptos radica en la etimología de argumento. La representación trigonométrica de números reales es de amplia importancia en la matemática. Analiza la teoría y resuelve con entusiasmo y concentración los problemas.

LA CAIDA DEL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

Recordemos que *ELEMENTOS* se llama la magistral colección de libros que en 13 tomos escribió *EUCLIDES* en el siglo III A.C. en Alejandría, ciudad situada en el delta del Nilo. Euclides, matemático griego, era en aquellos tiempos maestro del rey de Egipto Ptolomeo y sus libros han dado la vuelta al mundo en siglos sucesivos; venerados por los árabes, los *ELEMENTOS* se convirtieron en la Biblia científica de la baja Edad Media primero, y en el punto de partida de los pensadores renacentistas después. En los nueve primeros libros Euclides se encarga de proponer axiomas o postulados a partir de los cuales se elabora toda una doctrina, pero el quinto postulado origina ya más de un problema; este dice: "Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta". En 1733 Saccheri hizo notar que este postulado era equivalente a afirmar que: "La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos" acercándose ligeramente a la verdad ya que después Bolilla, Gauss, Lobatchevsky y Riemann aportaron la respuesta correcta a esta cuestión. Todos ellos desde su propio punto de vista atacaron el 5º postulado de Euclides, básicamente a partir del siguiente hecho: Una regla apoyada sobre la superficie de una esfera (nuestro planeta) es un arco de círculo, y una recta por consiguiente, es un círculo completo, es decir: un círculo máximo. Paralelo estaríamos dibujando un círculo máximo y estos siempre se intersectan. Esto hace también pensar que por la imprecisión de nuestros instrumentos de medida, Euclides afirmaba que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo equivale a la de dos ángulos rectos, lo que no se cumple si un triángulo es enorme. Euclides dijo su verdad, pero solo para figuras pequeñas y en el plano, más vivimos en un universo curvado, ¡Ese es nuestro mundo real! Newton y Einstein han contribuido en la comprobación de la curvatura del universo, pero aun se sigue discutiendo el tipo de curvatura que adopta, mas el aporte de Euclides fue realmente valioso.

CONCEPTOS PREVIOS

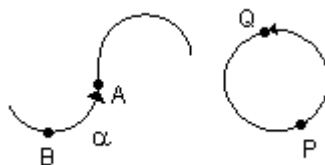
1. **ARCO ORIENTADO:** Es la trayectoria descrita por un punto al desplazarse sobre una curva, en un determinado sentido. Estos arcos tienen un origen y un extremo.

Para " α " : B $\rightarrow$ Origen

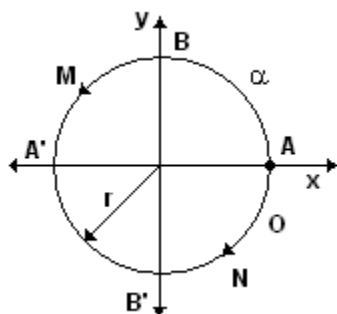
A $\rightarrow$ Extremo

Para " β " : P $\rightarrow$ Origen

Q $\rightarrow$ Extremo



ARCO EN POSICION NORMAL: Son arcos orientados que se determinan en una circunferencia canónica; con origen en el punto "A" que es el punto de intersección del eje X con la circunferencia, según se muestra en la figura; los cuales pueden tomarse en sentido antihorario (+) o en sentido horario (-), pc.



- "α" ^ "θ" son arcos en posición normal.
- "α" : positivo
"θ" : negativo
- "M" y "N" extremos de arco

OJO: Estudiar a la circunferencia unitaria ($r = 1$) es lo mismo que estudiar a la circunferencia Trigonométrica.

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA **ELEMENTOS**

O (0,0) : Origen
A (1,0) : Origen de arcos
B (0,1) : Origen de complementos de arcos
A' (-1,0) : Origen de suplementos de arcos
B' (0,-1) : Sin nombre especial
P (x,y) : Extremos de arco
Q (x,y)
α : (+) ^ β : (-)

Siendo P un punto de la circunferencia trigonométrica (C.T) cuyas coordenadas son (x;y) y el radio $r = 1$ se cumple que:

$$X^2 + y^2 = 1$$

⇒ Ecuación de la C.T.

Ejemplos: Determinar cual de los siguientes puntos pertenece a la C.T.

❶ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ❷ $M\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

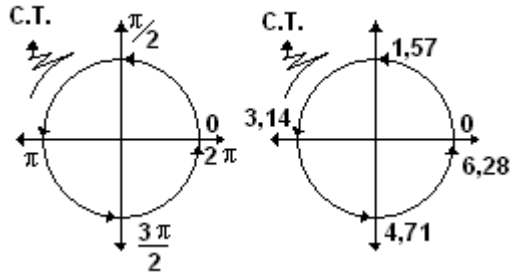
LOS NUMEROS REALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

En la matemática muchas veces realizamos aproximaciones, como:

$$\pi = 3,14; 2\pi = 6,28$$

$$\frac{\pi}{n} = 1,57 \quad 3\pi/2 = 4,71$$

A continuación presentamos un gráfico en el que estos números aproximados sean ubicados sobre la circunferencia Trigonométrica.



Observamos que ambas graficas sean equivalentes:

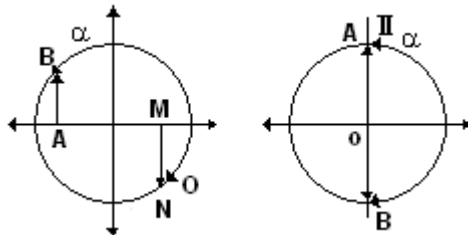
Por lo tanto tomando como referencia dichos gráficos: Ubicar aproximadamente $\pm 1 ; \pm 3 \pm 5 \pm 7$

TOMA NOTA: usualmente en el lenguaje matemático no se escribe rad. Sino se sobre entiende, ejemplos: $\angle AOB = 2$ en lugar de $\angle AOB = 2^\circ$, en lugar de $\angle AOB = 2\text{rad}$ $\text{Sen } \frac{\pi}{3}$ en lugar de

$$\text{Sen } \frac{\pi \text{ rad}}{4}$$

REPRESENTACION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS (LINEAS) EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA.

SENO: Es la Ordenada del extremo del Arco.



$$AB = \text{Sen } \alpha (+)$$

$$OA = \text{Sen } \frac{\pi}{2} (+)$$

$$MN = \text{Sen } \theta (-)$$

$$OB = \text{Sen } (-\beta) (-)$$

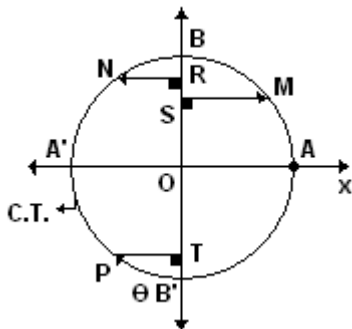
$$-1 \leq \text{Sen } \alpha \leq 1$$

$$\text{Sen } (\text{Max}) = 1$$

$$\text{Sen } (\text{Max}) = -1$$

COSENO: Es la Abcisa del extremo del Arco.

En el grafico, tenemos entonces que:



$$\begin{aligned} MS &= \cos \alpha (+) \\ NR &= \cos \beta (-) \\ PT &= \cos \theta (-) \end{aligned}$$

$$\boxed{-1 \leq \cos \alpha \leq +1} \begin{cases} (\cos \alpha)_{\max} = 1 \\ (\cos \alpha)_{\min} = -1 \end{cases}$$

TANGENTE: Es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de arcos y la prolongación de radio que pasa por el extremo del arco.

En el grafico, tenemos que:

$$AT = \operatorname{Tg} \alpha (+); AR = \operatorname{Tg} \beta (-)$$

Debe notarse que la L.T. Tangente puede ser trazada para cualquier arco " α " excepto para los extremos de arco B y B' ($\alpha \in \mathbb{R} - [2n+1]\pi/2$), ya que en esos puntos la recta tangente nunca se cortara con la prolongación de los radios debido a que son paralelas, cumpliéndose además:

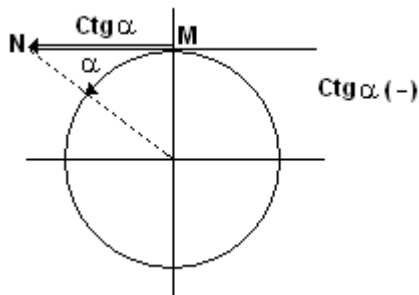
$$-\infty < \operatorname{Tg} \alpha < +\infty \begin{cases} (\operatorname{Tg} \alpha)_{\max} = +\infty \\ (\operatorname{Tg} \alpha)_{\min} = -\infty \end{cases}$$

Ejemplo 1: Graficar $\operatorname{Sen} 2$; $\operatorname{Sen} \frac{4\pi}{3}$

Ejemplo 2: Con la ayuda de la C.T. Graficar: $\cos 70^\circ$; $\cos 220^\circ$

Ejemplo: Graficar $\tan 2$, $\tan \frac{\pi}{4}$

COTANGENTE: Es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de complementos y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco.

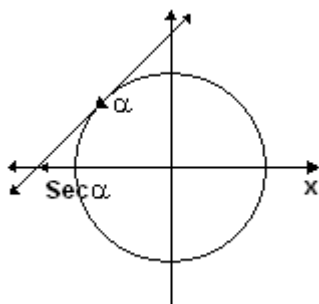


$$-\infty < \operatorname{Ctg} \alpha < \infty$$

Ejemplo 4: Graficar $\operatorname{Ctg} 2$; $\operatorname{Ctg} \frac{-\pi}{4}$

LINEA SECANTE: Es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje "X".

En el grafico, tenemos entonces que:



$\text{Sec} \alpha (-)$

$$+1 \leq \text{Sec} \alpha \leq -1$$

COSECANTE: Es la ordenada del punto de intersección del eje y con la recta tangente trazada por el extremo del arco.

$OU = \text{Csc } \alpha (+)$; $OV = \text{Csc } \beta (-)$, Debe notarse que la L.T. Cosecante puede ser trazada para cualquier arco " α " excepto para los extremos de arco A y Ai ($\alpha \in \mathbb{R} - n\pi$), ya que la Tangente geométrica que pase por estos puntos nunca se cortara con la abscisa o eje "Y", debido a que son paralelas, cumpliéndose además:

$$\begin{cases} -\infty < \text{Csc} \alpha \leq -1 & (\text{Csc} \alpha)_{\max} = +\infty \\ +1 \leq \text{Csc} \alpha < \infty & (\text{Csc} \alpha)_{\min} = -\infty \end{cases}$$

Es lo mismo que:

$$\text{Csc} \alpha \leq -1 \quad \vee \quad \text{Csc} \alpha \geq 1$$

Ejemplo 5: Graficar: $\text{Sec } 2,5 \wedge \text{Csc } 3$

LINEAS TRIGONOMETRICAS AUXILIARES

1. **Seno Verso o Verso (Vers):** Es lo que le falta al Coseno de un arco " θ " para valer la unidad. El verso es siempre positivo.

Por definición:

$$\text{Vers } \theta = 1 - \text{Cos } \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se llega a deducir la variación del Verso:

$$0 \leq \text{vers } \theta \leq 2$$

Ejemplo 6: Calcular $\text{Ver} \left[\frac{\pi}{3} \right]$

2. **Coseno Verso o Coverso (Cov):** Es lo que falta al Seno de un arco " θ " para valer la unidad. El Coverso es siempre positivo.

Por definición:

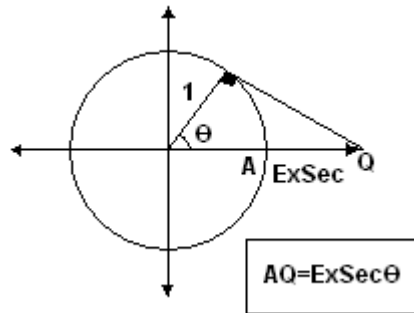
$$\text{Cov } \theta = 1 - \text{Sen } \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se llega a deducir la variación del Coverso:

$$0 \leq \text{Cov } \theta \leq 2$$

Ejemplo 7.

3. Ex -Secante o External: Es el exceso de la Secante respecto a la unidad. Si la Secante se mide hacia la derecha del origen de arcos entonces la Ex - Secante es positiva de lo contrario es negativo.



Ejemplos:

- 1) Determinar entre que limites debe estar comprendido "K" para que sea posible.

$$\cos x = \frac{5k - 3}{7}$$

Resolución:

Como:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\rightarrow -1 \leq \frac{5K - 3}{7} \leq 1$$

$$-7 \leq 5K - 3 \leq 7$$

$$-\frac{4}{5} \leq K \leq 2$$

$$\therefore K \in \left[-\frac{4}{5} : 2 \right]$$

- 2) En la circunferencia trigonométrica indicar verdadero falso según:

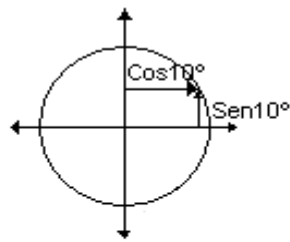
I) $\sin 10^\circ < \cos 10^\circ$

II) $\cos 4 < \cos 2$

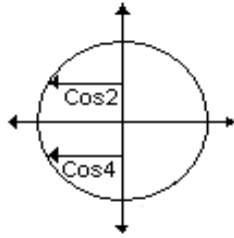
III) $\cos \frac{5\pi}{4} > \cos \frac{2\pi}{3}$

Resolución:

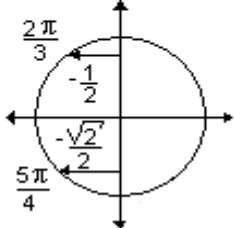
TRIGONOMETRIA



I) Verdadero



II) Verdadero

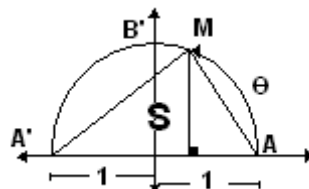
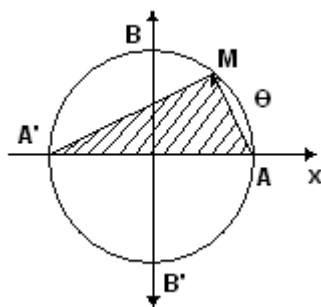


III) Falso

- 3) En la C.T. mostrada, hallar el área de la región sombreada en función de θ .

Resolución:

En este tipo de problemas es necesario aplicarle valor absoluto a la L.T. usada para garantizar el signo positivo del segmento.



$$\overline{A'A} = 2$$

$$S = \frac{\overline{A'A} \cdot \overline{MP}}{2}$$

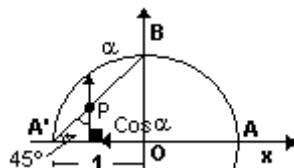
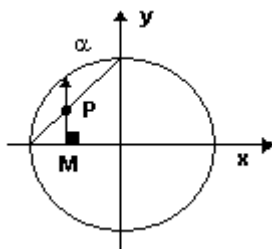
$$MP = \frac{|\text{Sen}\theta|}{+} \therefore MP = \text{Sen}\theta$$

Reemplazando:

$$S = \frac{2\text{Sen}\theta}{2} \therefore S = \text{Sen}\theta$$

- 4) Hallar PM en términos de α en :

Resolución:



Los triángulos $A'OB$ y $A'MP$ son notables con ángulo de 45°

$$\rightarrow PM = A'M$$

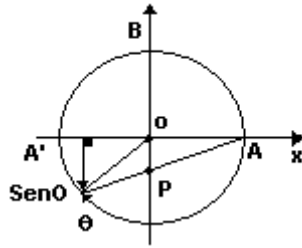
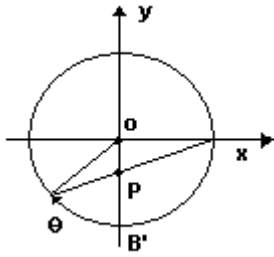
$$PM = 1 - |\text{Cos}\alpha|$$

$$\text{Como: } \alpha \in \text{III } C' \rightarrow |\text{Cos}\alpha| = -\text{Cos}\alpha$$

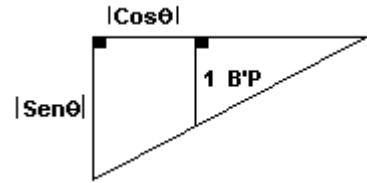
$$\therefore PM = 1 + \text{Cos}\alpha$$

- 5) De la C.T. calcular la longitud $\overline{B'P}$ Si $\text{Sen } \theta = -\frac{3}{5}$

Resolución:



Por lo tanto:



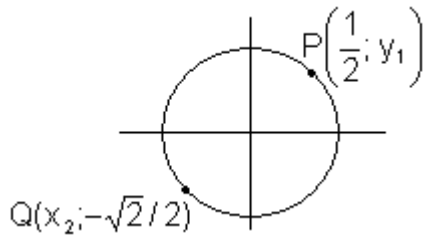
$$\rightarrow \frac{1 - B'P}{1} = \frac{|\text{Sen } \theta|}{1 + |\text{Cos } \theta|}$$

$$\rightarrow 1 - B'P = \frac{3/5}{1 + 4/5}$$

$$\therefore B'P = \frac{2}{3}$$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Calcular la ordenada y_1 , la abscisa x_2 de los puntos P Y Q en C.T.



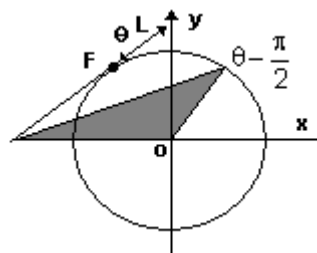
2. Ordenar en forma creciente: $\text{Sen } 10^\circ$, $\text{Sen } 110^\circ$, $\text{Sen } 310^\circ$

3. Determinar el signo de comparación que debe ir en el círculo:

$\text{Sen } 3$ ☐ $\text{Cos } 6$

$\text{Cos } 1$ ☐ $\text{Sen } 1$

4. Diga en qué cuadrante el seno aumenta y el coseno disminuye.
5. Del gráfico, hallar el área de la región sombreada siendo la recta L tangente a la C.T. en el punto F.



6. Siendo $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{6}$, calcular:
 $P = 4(\text{Sen } x)_{\max} - (\text{Cos } x)_{\min}$.
7. Determinar el área de la región sombreada. (M es un punto medio).
8. Determinar el área de la región sombreada.
9. Calcular el área sombreada:

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Determinar lo incorrecto:
 - I. $\text{Sen } 225^\circ = \text{Cos } 225^\circ$
 - II. $\text{Sen } 300^\circ > \text{Sen } 200^\circ$
 - III. $\text{Cos } 120^\circ > \text{Cos } 220^\circ$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) II y III
2. Determinar el signo de comparación que debe ir en el círculo.

$\text{Cos } 3$ ☐ $\text{Cos } 4$

$\text{Sen } 3$ ☐ $|\text{Sen } 4|$

A) $> ; >$ B) $< ; <$ C) $< ; >$
 D) $> ; <$ E) $= ; =$
3. Ordenar en forma creciente:

$\text{Cos } 50^\circ, \text{Cos } 150^\circ, \text{Cos } 250^\circ, \text{Cos } 350^\circ$

 - a. $\text{Cos } 350^\circ, \text{Cos } 250^\circ, \text{Cos } 150^\circ, \text{Cos } 50^\circ$
 - b. $\text{Cos } 350^\circ, \text{Cos } 250^\circ, \text{Cos } 50^\circ, \text{Cos } 150^\circ$
 - c. $\text{Cos } 350^\circ, \text{Cos } 50^\circ, \text{Cos } 250^\circ, \text{Cos } 150^\circ$
 - d. $\text{Cos } 150^\circ, \text{Cos } 50^\circ, \text{Cos } 350^\circ, \text{Cos } 250^\circ$
 - e. $\text{Cos } 50^\circ, \text{Cos } 350^\circ, \text{Cos } 150^\circ, \text{Cos } 250^\circ$
4. Determinar lo incorrecto:
 - I. $\text{Cos } 240^\circ = \text{Cos } 120^\circ$
 - II. $\text{Sen } 50^\circ > \text{Sen } 150^\circ$
 - III. $\text{Cos } 10^\circ > \text{Cos } 320^\circ$

A) VVV B) VVF C) VFV
 D) VFF E) FVF
5. ¿Cuales de las siguientes expresiones son positivas o negativas?

a) $\tan(3.8)$ b) $\cos 10$ c) $\text{sen}(-4)$
 d) $\sec \left[-\frac{\pi}{9} \right]$ e) $\cot(\pi - 1)$

6. Hacer las figuras correspondientes en la C.T. y hallar los valores de:
 - a) $\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta$
 - b) $\sec \alpha - \csc \alpha \cdot \cot \alpha$
 Siendo $\theta = \frac{7\pi}{4}$ y $\alpha = \frac{11\pi}{6}$
7. De la circunferencia trigonométrica mostrada, hallar PQ en términos de β .
 - a) $1 + \operatorname{Sen} \beta$
 - b) $1 - \operatorname{Sen} \beta$
 - c) $1 + \operatorname{Cos} \beta$
 - d) n.a.
8. De la figura adjunta, determinar el valor del segmento BK, en términos de θ .
 - a) $\sqrt{1 + \operatorname{Sen} \theta}$
 - b) $\sqrt{2(1 - \operatorname{Cos} \theta)}$
 - c) $\sqrt{2 - \operatorname{Cos} \theta}$
 - d) $\sqrt{2(1 + \operatorname{Sen} \theta)}$
 - e) n.a.
9. Determinar el área de la región sombreada:
 - a) $\frac{1 + \operatorname{Sen} \theta}{2}$
 - b) $\frac{1 - \operatorname{Sen} \theta}{2}$
 - c) $\frac{\operatorname{Sen} \theta - 1}{2}$
 - d) $\frac{1 - \operatorname{Cos} \theta}{2}$
 - e) $\frac{1 + \operatorname{Cos} \theta}{2}$

EVALUACION

1. Diga en que cuadrante el seno disminuye y el _____:
2. termine el valor de verdad de las proposiciones:
 - I. $\tan 3 > \sec > \csc 3$
 - II. $\tan(-1) < \cot(-1) < \sec(-1)$
 - III. $\tan 2 > \cot 2 > \sec 2$
3. Determínese _____ de la región sombreada en términos de α .