EJERCICIOS DE LA FACTORIZACIÓN IV

I. MÉTODO DE LOS DIVISORES BINOMIOS O EVALUACIÓN BINÓMICA:

Este método se emplea para factorizar polinomios de una sola variable y de cualquier grado y que admiten factores de primer grado de la forma general $(ax \pm b)$

Se basa en el criterio de divisibilidad de polinomios y por lo tanto usa el criterio del teorema del resto en forma inversa.

Así: "Sí un polinomio P(x) se anula para: x=a entonces (x-a) será un factor".

➢ ***CEROS DE UN POLINOMIO (CEROS RACIONALES)***

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable de un polinomio y hacer que su valor numérico sea igual a CERO.

Ejemplo:

Si $P(x)=x^3+6x^2+11x+6$

Para: $x=-1$

$P(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=0$

$\therefore$ Podemos decir que "-1 es un cero del polinomio P(x)"

➢ ***COMO DEBE TERMINAR LOS POSIBLES CEROS DE UN POLINOMIO.***

A. Si el polinomio tiene como primer coeficiente la unidad.

En este caso los posibles **ceros racionales** estarán dados por los divisores del término independiente con s

u doble signo $(\pm)$.

Así: $P_{(x)}=x^3+6x^2+11x+6$

Dirás entonces que los posibles ceros estarán determinados por los divisores de 6:

$\pm1;\ \pm2;\ 3\pm;\ \pm6$

B. Si el primer coeficiente del polinomio es diferente de la unidad.

En este caso se toman los valores fraccionarios que resultan de dividir los divisores del término independiente entre los divisores del primer coeficiente.

Así:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{Div. del término independiente}}{\text{Div. del primer coeficiente}}$$

Ejemplo:

$P(x)=6x^3+11x^2+6x+\boxed{1}$

Posibles ceros: $\frac{1}{1, 2, 3, 6}$

Posibles ceros:

$\pm 1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{6}$

- ***PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR:***

1° Determinar los ceros del polinomio:

2° Deduces el factor que da lugar al cero del polinomio:

"Si un polinomio se anula para x=a ó P(a)=0, entonces dicho polinomio tendrá un factor (x-a)"

3° El otro factor lo determinas utilizando el método del RUFFINI, el cual emplearás tantas veces como ceros tenga el polinomio.

4° Cuando los términos del polinomio son positivos, solamente pruebas los valores negativos.

Ejemplo:

Factorizar:

$P(x)=x^3+6x^2+15x+14$

Solución:

1° Determinamos los posibles ceros del polinomio:

2° Ahora hallemos por lo menos un cero del polinomio:

Para: x=-2

$P(-2)=(-2)^3+6(-2)^2+15(-2)+14$

$P(-2)=-8+24-30+14$

$P(-2)=0$

$\therefore$ "-2" es un cero del polinomio

3° Si P(-2)=0 $\Rightarrow$ x+2=0 por lo tanto (x+2) es un factor o divisor.

4° Divide P(x)+(x+2) por el método de RUFFINI.

	1	+6	+15	+14
-2	⋮	-2	-8	-14
	1	4	+7	0

Cociente de 2° grado

Rpta. $\boxed{P(x)=(x+2)(x^2+4x+7)}$

Ejemplo:

Factorizar:

$P(x)=x^3-2x^2-6x-3$

Solución:

1° Determinando los posibles ceros: ± 1; ± 3.

Evaluamos para x=1

$P(1)=(1)^3-2(1)^2-6(1)=-10,$

No se aula.

Evaluamos para x-1

$P(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-6(-1)=0$

Se anula, en consecuencia tendrá un factor (x+1).

2° Aplicamos RUFFINI para determinar el otro factor.

	1	-2	-6	-3
-1		-1	3	3
	1	-3	-3	0

Cociente de 2° orden

Rpta. $P(x)=(x+1)(x^2-3x-3)$

II. <u>MÉTODO DE LOS ARTIFICIOS DE CALCULO</u>:

Este método consiste en darle una forma adecuada al polinomio, operando en forma conveniente, realizando cambios de variable o sumando o restando una misma cantidad con la finalidad de hacer más sencilla su factorización osea hacer figurar productos conocidos.

A. <u>CAMBIO DE VARIABLES</u>

Consiste en buscar expresiones iguales, directa o indirectamente a través de ciertas transformaciones para luego proceder a un cambio de variable que permitirá transformar una expresión aparentemente compleja en otra más simple.

<u>Ejemplo:</u>

Factorizar:

$P(x)=(x^2+y+1)-(x^2+1)(x^2-3y+1)^2$

<u>Solución:</u>

- Observa que la expresión (x^2+1)se repite "3 veces" por lo tanto haremos un cambio de variable, así:

Hacemos que: $x^2+1=m$

Entonces: $P(x)=(m+y)^3-(m)(m-3y)^2$

Efectuando los productos indicados:

$m^3+3m^2y+3my^2+y^3-m(m^2-6my+9y)^2$

$m^3+\cancel{3m^2y}+3my^2+y^3-m^3+\cancel{6m^2y}-9my^2$

$9m^2\underline{y}-6m\underline{y}^2+\underline{y}^3$

$y\ (9m^2 - 6my + y^2)$

$$\begin{array}{lcl} 3m & \times & -y \\ 3m & & -y \end{array}$$

$y\ (3m-y)\ (3m-y) = y\ (3m-y)^2$

$= y[3(x^2+1)-y]^2$

$= y\ (3x^2+3-y)^2$

$\therefore \quad P(x)=y(3x^2-y+3)^2$

Ejemplo:

Factorizar:

$P(x)=(x^2+7x-3)^2-2(x^2+7x)-29$

Solución:

Observas que la expresión x^2+7x se repite, por lo tanto haremos un cambio de variable.

Hacemos que: $x^2+7x=a$

$P(x)=(a-3)^2-2(a)-29$

desarrollando

$P(x)=a^2-6a+9-2a-29$

$P(x)=a^2-8a-20$

Factorizando por aspa simple:

$P(x) = a^2 - 8a - 20$

$$\begin{array}{lcrcr} a & \times & -10 & \rightarrow & -10a \\ a & & 2 & \rightarrow & \underline{+2a} \\ & & & & -8a \end{array}$$

Tomando los factores en forma horizontal:

$P(x)=(a-10)(a+2)$

Reemplazando "a" por su valor:

Rpta. $P(x)=(x^2+7x-10)(x^2+7x+2)$

B. ARTIFICIO DE "QUITA Y PON" O REDUCCIÓN A DIFERENCIA DE CUADRADOS.

Consiste en sumar y restar una expresión (quitar y poner) de modo tal que haciendo ciertas reducciones logres formar un trinomio cuadrado perfecto y como consecuencia de ésta situación se forma una diferencia de cuadrados.

Ejemplo:

Factorizar:

$P(x)=x^4+2x^2+9$

Solución:

- Seguramente lo primero que harías sería factorizarlo por el aspa simple, pero no resultaría, cierto (inténtalo), luego podrías factorizar por identidades, pero te diste cuenta que no es un trinomio cuadrado perfecto, agotadas tus posibilidades recurres al método de quita y pon, así:

$P(x)=x^4+2x^2+9$

1° Sacando raíz cuadrada de los extremos.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^4}=x^2 \\ \sqrt{9}=3\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{2(x^2)(3)=6x^2}_{\text{Doble producto}}$$

2° Del esquema: tienes $2x^2$, pero debes tener $6x^2$ para ello tendrás que sumarle $(4x^2)$ y para que no se altere le restas $(-4x^2)$, y así formaste el trinomio:

$P(x) = x^4 + 2x^2 + 9 + 4x^2 - 4x^2$

$P(x) = x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \times & 3 \\ x^2 & & 3 \end{array}$$

$P(x) = (x^2+3)(x^2+3)-4x^2$

$P(x) = (x^2+3)^2-4x^2$

$$P(x) = \underbrace{(x^2+3)^2-(2x)^2}_{\textbf{DIF. De CUADRADOS}}$$

$P(x) = (x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$

Rpta. $\therefore$ $P(x)=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

Ejemplo:

Factorizar:

$Q(x,y)=x^8+x^4y^6+25y^{12}$

Solución:

Aplicamos el mismo criterio del ejemplo anterior.

$Q(x,y)=x^8+x^4y^6+25y^{12}$

(1) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^8}=x^4 \\ \sqrt{25y^{12}}=5y^6\end{array}\right\} 2(x^4)(5y^6)=10x^4y^6$$

(2) Como solo tenemos x^4y^6, para conseguir $10x^4y^6$ se suma y se resta $9x^4y^6$. Así:

$x^8+x^4y^6+25y^{12}+9x^4y^6-9x^4y^6$

$x^8+10x^4y^6+25y^{12}-9x^4y^6$

$$\begin{array}{ccc} x^4 & & 5y^6 \\ & \times & \\ x^4 & & 5y^6 \end{array}$$

$\therefore$ $Q(x,y) = (x^4+5y^6)(x^4+5y^6)-9x^4y^6$

$Q(x,y)=(x^4+5y^6)^2-9x^4y^6$

$Q(x,y) = \underbrace{(x^4+5y^6)^2-(3x^2y^3)^2}_{DIF.\ de\ CUADRADOS}$

$Q(x,y)=(x^4+5y^6+3x^2y^3)(x^4+5y^6-3x^2y^3)$

$Q(x,y)=(x^4+3x^2y^3+5y^6)(x^4-3x^2y^3+5y^6)$

C. <u>SUMA Y RESTAS ESPECIALES</u>:

Consiste en sumar y restar una o varias expresiones en forma conveniente de tal modo que se formen uno de los trinomios (x^2+x+1) ó (x^2-x+1) ambos componentes de una diferencia o suma de cubos (x^3-1) ó (x^3+1). Algunas veces se forman trinomios de la forma:

(x^2+x-1) ó (x^2-x-1)

Ejemplo:

Factorizar:

$P(x)=x^5+x+1$

Solución:

1° Completar el polinomio sumando y restando toda las potencias de "x" que faltan.

$P(x)=x^5+x+1+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2$

2° Agrupamos los términos de 3 en 3 e n forma conveniente.

$P(x)=x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+ (x^2+x+1)$

$\boxed{\text{Rpta. } P(x)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)}$

Ejemplo:

Factorizar:

$Q(x)=a^5+a-1$

Solución:

Sumamos y restamos a^2

$Q(x)=a^5+a-1+a^2-a^2$

Agrupando convenientemente.

$Q(x)=(a^5+a^2)-(a^2-a+1)$

$Q(x)=a^2(a^3+1)-(a^2-a+1)$

$Q(x)=a^2(a+1)(a^2-a+1)-(a^2-a+1)$

Sacando factor común polinomio.

$Q(x)=(a^2-a+1)[a^2(a+1)-1]$

$Q(x)=(a^2-a+1)(a^3+a^2-1)$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Factorizar: $x^3 - 7x + 6$

   Resolución:

Rpta. $(x-1)(x+3)(x-2)$

2. Factorizar: $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

   Resolución:

   pta. $(x-1)(2x-1)(x+3)$

3. Factorizar: $2x^3 - 5x^2 + x + 2$

   Resolución:

Rpta. $(2x+1)(x-2)(x-1)$

4. Factorizar: $30x^3 + 19x^2 - 1$

   Resolución:

Rpta. $(3x+1)(5x-1)(2x+1)$

5. Factorizar:

   $2(x^2+y)(x^2+y+2z)+3(x^2+y-5z)z$

   Resolución:

   Rta. $(x^2+y+5z)(2x^2+2y-3z)$

6. Factorizar: $(a^2+b+1)^3-(a^2+1)(a^2-3b+1)^2$

   Resolución:

   Rpta. $b(3a^2+3-b)^2$

7. Factorizar: $x^5 + x - 1$

   Resolución:

   Rpta. $(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)$

8. Factorizar: $9x^4 - 16x^2 + 4$

   Resolución:

   Rpta. $(3x^2+2x-2)(3x^2-2x-2)$

ALGEBRA

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Factorizar: $a^4 + 2a^2 + 9$ e indicar uno de sus factores primos:
   a) $(a^2 + a + 3)$
   b) $(a^2 + 2a + 3)$
   c) $(2a^2 + a + 3)$
   d) $(a^4 + a^2 + 2a)$
   e) N.A.
2. Factorizar: $a^4 + a^2 + 1$ e indicar uno de sus factores primos:
   a) $(a^2 + a + 1)$
   b) $(a + 1)$
   c) $(a - 1)$
   d) $(a^2 + 2a + 1)$
   e) N.A.
3. Factorizar: $x^3 + 6x - 7$
   a) $(x - 1)(x + 15)$
   b) $(x + 1)(x^2 + 5x)$
   c) $(x + 1)(x + 6)$
   d) $(x - 1)(x^2 + x + 7)$
   e) $(x - 1)(x^2 + 5)$
4. Factorizar: $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$
   a) $(x+1)(x-8)(x-3)$
   b) $(x-1)(x-2)(x-5)$
   c) $(x+1)(x+5)(x+2)$
   d) $(x-1)(x-2)(x-3)$
   e) $(x-2)(x-4)(x-6)$
5. Factorizar: $9x^3 + 3x^2 – 24x + 12$
   a) $2(x - 3)(x + 4)(x + 7)$
   b) $4(x + 5)(x - 6)(x - 9)$
   c) $5(x - 1)(x - 7)(x - 6)$
   d) $3(x - 1)(x + 2)(3x - 2)$
   e) $6(x + 1)(x + 9)(x + 8)$

6. Factorizar: $2x^3 - 16x^2 + 34x - 20$

   a) $3(x - 3)(x + 2)(x + 11)$
   b) $2(x + 2)(x + 5)(x - 3)$
   c) $2(x - 1)(x - 2)(x - 5)$
   d) $4(x + 1)(x + 2)(x + 9)$
   e) $5(x - 1)(x - 3)(x - 7)$

7. Factorizar: $2x^3 + 3x + 5$

   a) $(x - 1)(x^2 + 2x)$
   b) $(x + 1)(2x^2 - 2x + 5)$
   c) $(x - 1)(x + 4)$
   d) $(x + 2)(x^2 + 2x + 9)$
   e) $(x - 2)(x^2 - 5x + 5)$

8. Factorizar: $a^4 + a^2 b^2 + b^4$

   a) $(a+b)(a - ab + b)$
   b) $(a-b)(a^2 + a - b^2)$
   c) $(a+b)(a^2 - b^2)$
   d) $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$
   e) $(a^2 + b^2)(a^2 + a + b^2)$

9. Factorizar: $4m^4 + 3m^2 + 9$ e indicar uno de sus factores.

   a) $(4m^2 + 3 + 2m)$
   b) $(2m^2 - 3 + 4m)$
   c) $(2m^2 + 3 - 3m)$
   d) $(5m^2 + 2 - 5m)$
   e) $(7m^2 + 2 - 5m)$

10. Factorizar: $16x^4 + 4x^2 + 1$ e indicar la suma de coeficientes de uno de sus factores primos

   a) 2
   b) 3
   c) 4
   d) 5