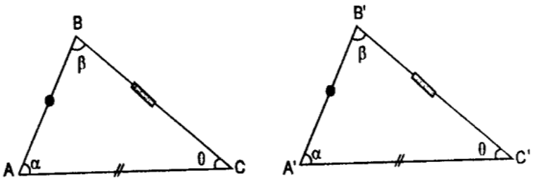
CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Indicador:
Identificar los criterios de congruencia y resolver problemas

Concepto

Dados los triángulos ABC y A´B´C (Fig.6.1) en donde sus vértices se corresponden biunívocamente, entonces existe una correspondencia entre los ángulos y los lados de dichos triángulos denota de esta manera ↔.



$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{A'B'}$

$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{B'C'}$

$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{A'C'}$

$\angle A \leftrightarrow \angle A'$

$\angle B \leftrightarrow \angle B'$

$C\angle \leftrightarrow C'$

Además si los pares de lados correspondientes son congruentes y los pares de ángulos correspondientes también son congruentes, entonces la correspondencia ABC ↔ A´B´C es una congruencia entre los dos: triángulos.
Cuando escribimos $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C$ nos indica tácitamente congruencia de seis pares de elementos.

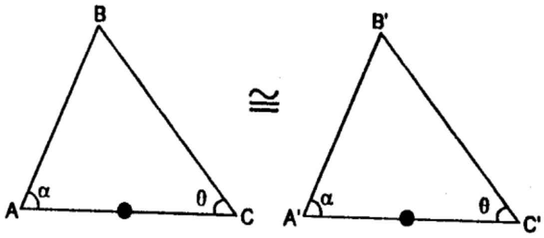
Observación:

En dos triángulos congruentes se verifica que a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes y recíprocamente a lados congruentes se le oponen ángulos congruentes. Advertimos también que para que dos triángulos sean congruentes no necesariamente los seis pares de elementos correspondientes deber ser congruentes si no por lo menos tres pares de ellos, entre los que por lo menos debe figurar un par de lados correspondientes esto implica la congruencia de los elementos restantes tal como veremos en los postulados siguientes.

Postulados para la congruencia de triángulos

Postulado I

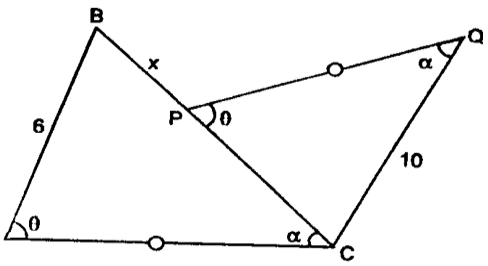
A .L.A (Ángulo – Lado – Ángulo)



Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes un lado y los ángulos adyacentes a él".
Así en la Fig. 6.2a; si: $\angle A \cong A'$; $\angle C \cong C'$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$

Ejemplo:
En la figura: PQ = AC calcular: BP



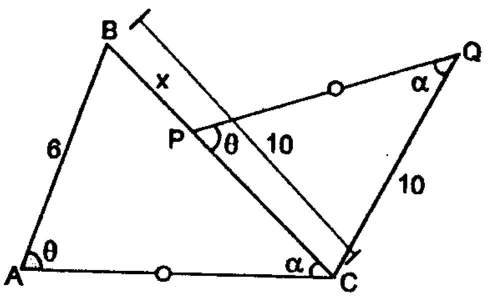
Resolución:

Observamos que: $\Delta ABC \cong \Delta PQC$ (ALA)

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = PC = 6 \\ BC = QC = 10 \end{cases}$$

x + 6 = 10

$\therefore$ $\boxed{x = 4}$



de donde:

Postulado II. L.A.L (lado-ángulo-lado)

"Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes dos pares de lados y los ángulos determinados por dichos lados.

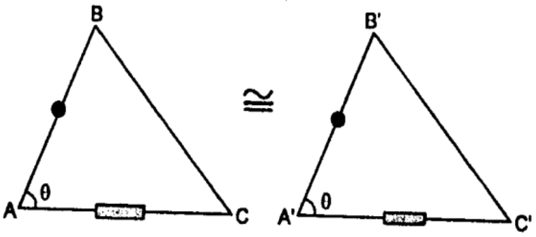


Fig. 6.2b.

Si: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\angle A \cong \angle A'$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

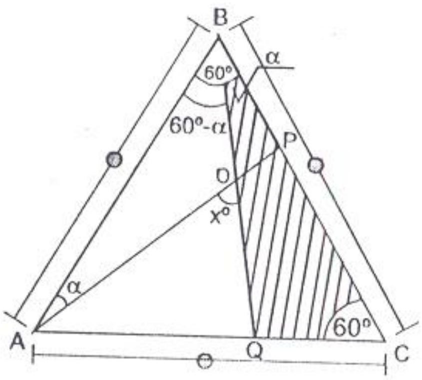
Ejemplo:

En un triángulo equilátero ABC, se trazan las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ que se intersectan en 0.

Si BP = QC. Calcular m $\angle$AOQ

Resolución:

- En el triángulo equilátero ABC:AB = BC = AC y m$\angle$B = m$\angle$C = 60
- ΔABP $\cong$ ΔBQC (LAL)



Además: m $\angle$ ABQ = 60 - α

- En el ΔABQ, por ángulo exterior:

$$x = \alpha + 60 - \alpha$$

$$\boxed{x = 60}$$

Postulado III (lado-lado-lado)

"Dos triángulos son congruentes si los tres lados del primer triángulo son congruentes a los tres lados del segundo".

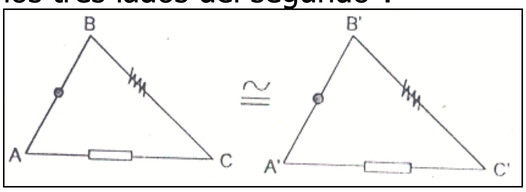
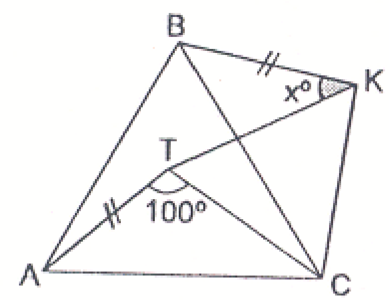


Fig. 6.2 c

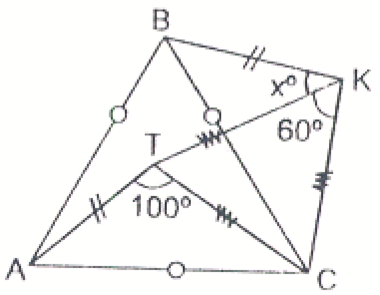
En la Fig. 6.2c., si: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta ABC \cong \overline{A'B'C''}}$

Ejemplo
Si los triángulos ABC y TKC son equiláteros. Calcula x
Además: AT = BK



<u>Resolución</u> :
Si los triángulos ABC y TKC son equiláteros, entonces:
AB = BC = AC y TK = KC = TC, además m$\angle$ TKC -= 60



Postulado IV
"Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de estos lados".

En la Fig. 6.2d., Si: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\angle$B $\cong$ $\angle$B .

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta \text{ABC} \cong \text{A´ B´C´}}$

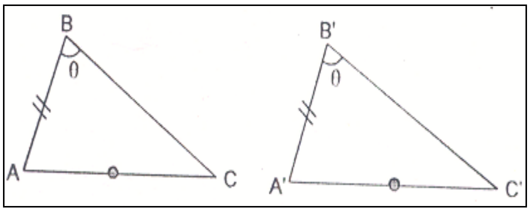
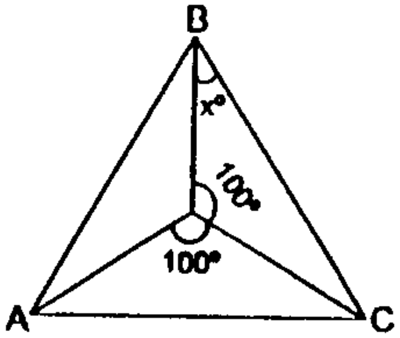


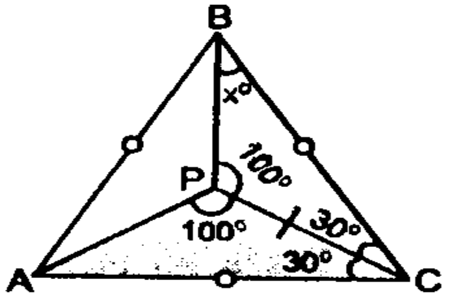
Fig. 6.2d
Ejemplo:
En la figura el ΔABC es equilátero.

Calcular "x"



Resolución:

- Del gráfico podemos apreciar las siguientes características:
  BC = AC; BC > PC luego:
  Δ APC $\cong$ BPC (postulado IV)
  $\Rightarrow$ m $\angle$ACP = m$\angle$PCB = 30
- En el ΔBPC:



X + 100 + 30 = 180

$\therefore$ $\boxed{x = 50}$

Congruencia de triángulos rectángulos

Para congruencia de triángulos rectángulos basta con que los triángulos tengas dos elementos congruentes esto es debido a la presencia del ángulo recto.

Postulado I.

Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen congruentes la hipotenusa y un cateto (Fig. 6.3 a)

Postulado II

Para que dos triángulos rectángulos sean congruentes es necesario que tengan congruentes los catetos (Fig. 6.3b).

Postulado IV

Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen congruentes un cateto y el ángulo agudo opuesto a él. (Fig. 6.3d).

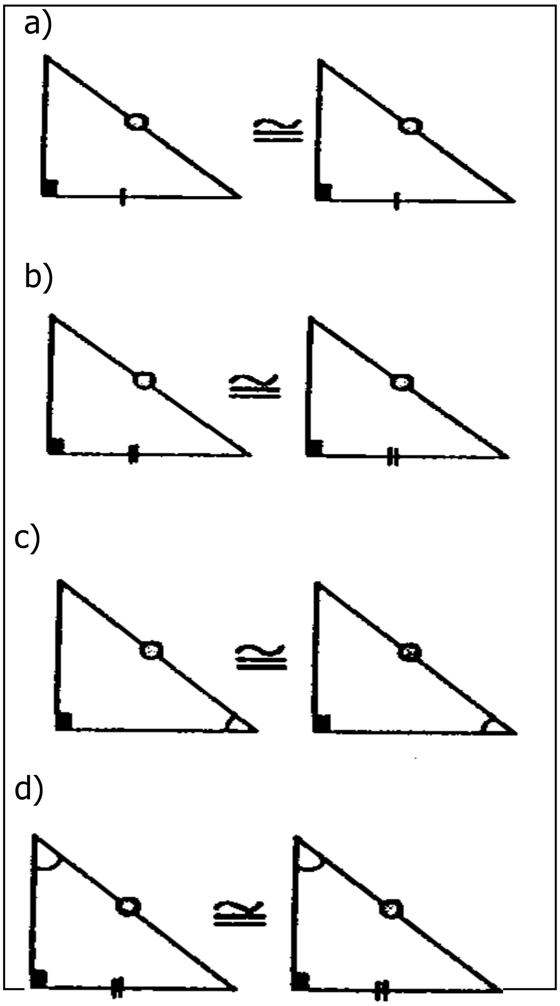


Fig. 6.3

Teorema de la bisectriz de un ángulo

"Cualquier punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados de dicho ángulo".

En la Fig. 6.4; P es un punto de la bisectriz $\overrightarrow{OF}$ del $\angle$AOB, luego:

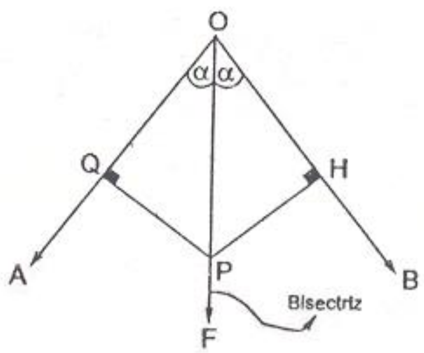


Fig. 6.4

$\boxed{PQ = PH}$

Demostración:

- Obsérvese que los triángulos rectángulos OQP y OHP tienen en común la hipotenusa $\overline{OP}$ y tienen congruente un ángulo agudo, luego:

  ⊿ OPQ $\cong$ ⊿ OHP (Postulado III)

  Observación: <u>OQ = OH</u>

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

"Cualquier punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento".

En la Fig. 6.5; $\overline{L}$ es mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento".

En la Fig. 6.5 $\overline{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y P$\in \overline{L}$.

Luego se cumple que:

$$\boxed{PA = PC}$$

Demostración:

De la Fig. 6.5 a podemos apreciar que:

⊿ PMA $\cong$ ⊿ PMC (Postulado II)

$$\boxed{PA = PC}$$

Observación:

Nótese que al aplicar el teorema de la mediatriz aparece un triángulo isósceles; por ello podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{Mediatriz} \Rightarrow \ \Delta\,\text{Isósceles}}$$

Consecuencia:

Si en el triángulo isósceles ABC (Fig. 6.5b)

Con AB=BC se traza la altura $\overline{BH}$, esta línea también cumplirá la función de las otras líneas notables.

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

"En todo triángulo, se cumple que el segmento que une los puntos medios de dos lados de él es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de este"

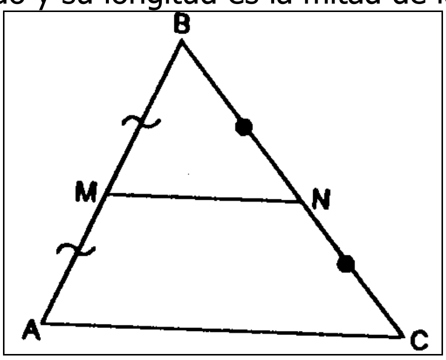
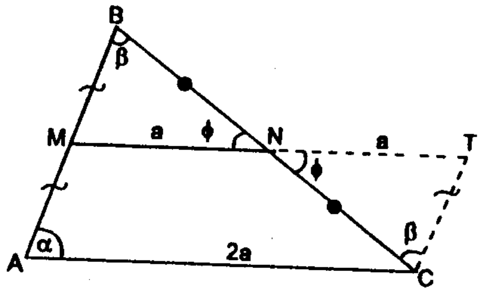


Fig. 6.6
En la Fig. 6.6; M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ luego se cumplen las siguientes relaciones:

$$\boxed{\begin{array}{c}\overline{MN} \,//\, \overline{AC} \\ \overline{MN} = \dfrac{AC}{2}\end{array}}$$

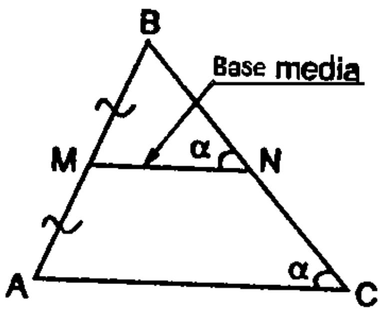
Demostración:



- Trazamos $\overline{CT} \,//\, \overline{AB}$, luego: m $\angle$NTC = m$\angle$B= β y m $\angle$MNB = $\angle$NTC = ϕ
- $\angle$MNB $\cong$ TNC (ALA)
  $\Rightarrow$ MN = NT = a y AM = TC; pero MT=AC $\Rightarrow$ AC = 2a
  Además como $\overline{MT} \,//\, \overline{AC}$; en conclusión:

$$\boxed{\text{MN} = \frac{AC}{2} \; y \, \overline{MT} \,//\, \overline{AC}}$$

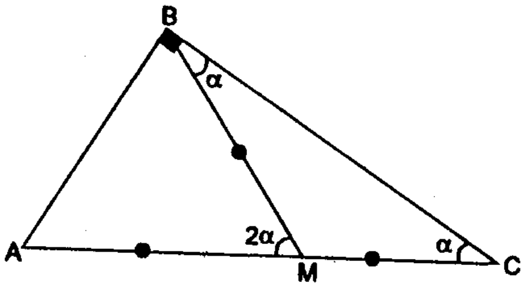
Observación:
Si por el punto medio M del lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC se traza $\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$ (N $\in \overline{BC}$), luego $\overline{MN}$ será también Base Media.



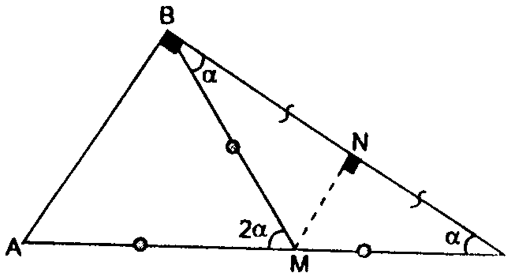
TEOREMA DE LA MEDIANA EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En todo triángulo rectángulo la mediana referente a la hipotenusa (menor mediana) tiene una longitud que es igual la mitad de la longitud de la hipotenusa.

En la Fig. 6.7 $\overline{BM}$ es mediana, luego:



Nótese que: AM = BM = MC y
También m $\angle$AMB = 2 m $\angle$C.
Demostración:



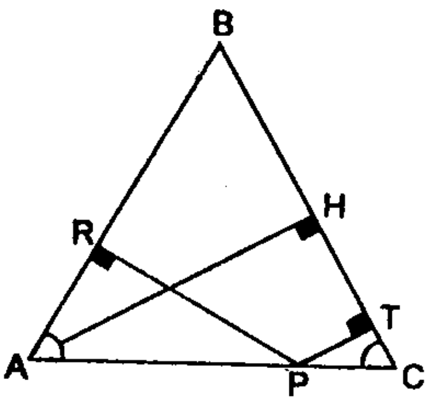
- Trazamos la base Media $\overline{MN}$ en el $\triangle$ABC, luego $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$ $\Rightarrow$ $\overline{MN} \perp \overline{BC}$
- Para el triángulo BMC:
  $\overline{MN}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, en consecuencia el triángulo BMC es isósceles, donde:
  BM = MC

$\therefore$ $\boxed{BM = \dfrac{AC}{2}}$

PROPIEDADES PARTICULARES EN LOS TRIÁNGULOS ISÓSCELES Y EQUILÁTEROS

1° Propiedad

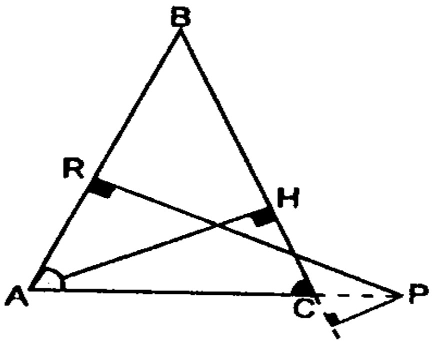
Si: AB = BC y P$\in$ $\overline{AC}$ se cumple:



$\boxed{AH = PR + PT}$

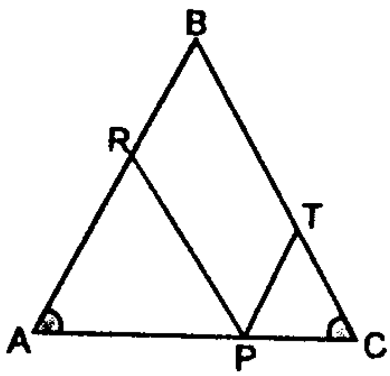
2° Propiedad

Si: AB = BC y P está en la prolongación de $\overline{AC}$ se cumple:



$\boxed{AH = PR + PT}$

3° Propiedad:

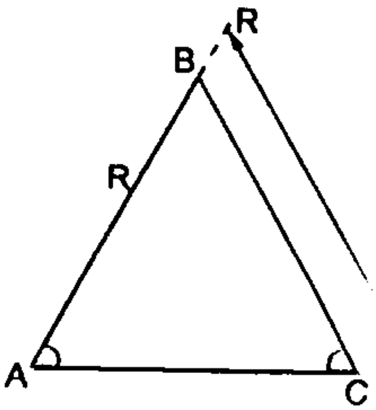


Si: AB = BC, P $\in$ $\overline{AC}$ y $\overline{PR}$ // $\overline{BC}$; PT // $\overline{AB}$

Se cumple:

$\boxed{AB = PR + PT}$

4° Propiedad



Si AB = BC

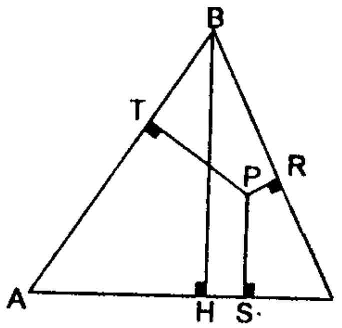
$\overline{PR}$ // $\overline{BC}$

$\overline{PT}$ // $\overline{AB}$

Se cumple:

$\boxed{AB = PR - PT}$

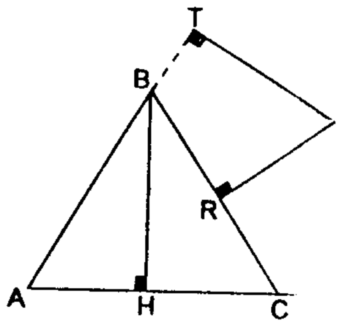
5. Propiedad



Si: ABC $\rightarrow$ Equilátero P es interior al ABC se cumple:

$\boxed{BH = PT + PR + PS}$

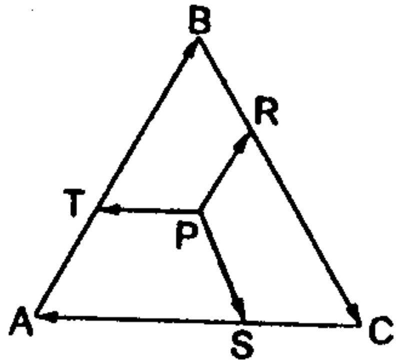
6. Propiedad



Si: ΔABC $\rightarrow$ Equilátero; P es exterior al Δ ABC se cumple:

$\boxed{BH = PT + PR + PR}$

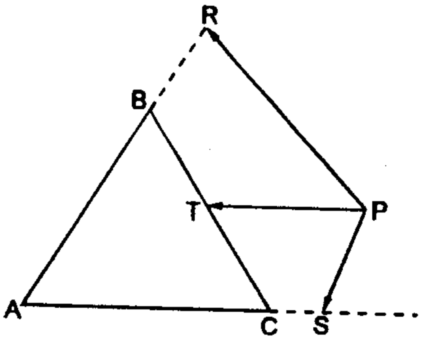
7° Propiedad



Si: AB $\rightarrow$ equilátero:
$\overline{PT}$ // $\overline{AC}$: $\overline{PR}$ // $\overline{AB}$
y $\overline{PS}$ // $\overline{BC}$, se cumple:

$\boxed{AB = PT + PR + PS}$

8° Propiedad



Si: AB $\rightarrow$ equilátero:

$\overline{PR} \;//\; \overline{BC}$

$\overline{PT} \;//\; \overline{AC}$ y

$\overline{PS} \;//\; \overline{AB}$

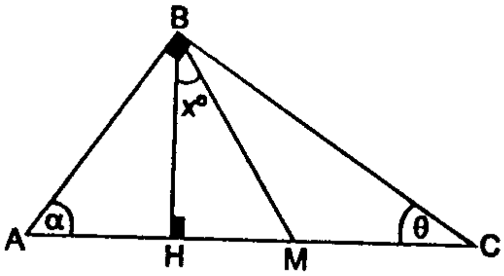
Se cumple:

$\boxed{AB = PR + PS - PT}$

PROPIEDADES PARTICULARES EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1° Propiedad

Si:



$\boxed{x = \alpha - \theta}$

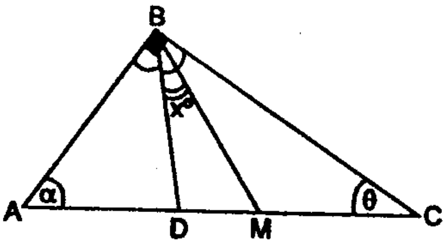
$\overline{BH}$: Altura y

$\overline{BM}$: Mediana

$\boxed{c = \alpha + \theta}$

2° Propiedad

Si:



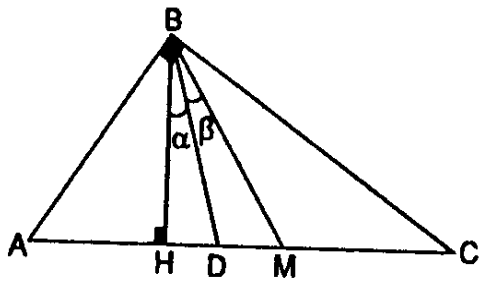
$\overline{BD}$: Bisectriz

$\overline{BM}$: Mediana

$$\boxed{x = \frac{\alpha - \theta}{2}}$$

3° Propiedad

Si:



$\overline{BH}$: Altura

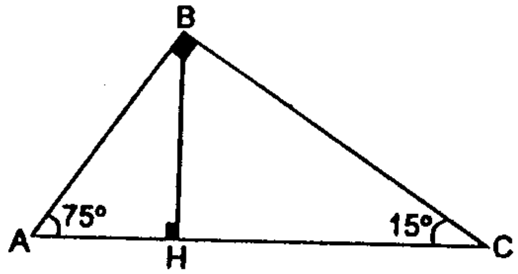
$\overline{BD}$: Bisectriz

$\overline{BM}$: Mediana

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

4° Propiedad
En el triángulo rectángulo de 15° y 75°.

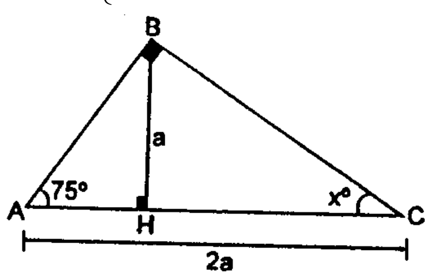
Se cumple que:



$$\boxed{BH = \frac{AC}{4}}$$

5° **Propiedad (Consecuencia de la 4° propiedad)**

Si: $\begin{cases} BH = \dfrac{AC}{2} \\ m\angle = 75 \end{cases}$

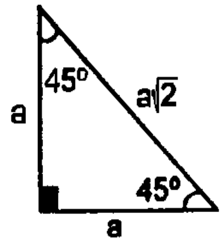


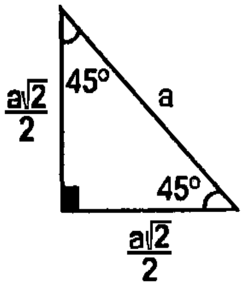
Y el Δ ABC es acutángulo se cumple:

$$\boxed{X = 30°}$$

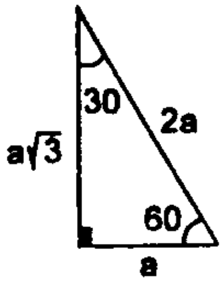
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

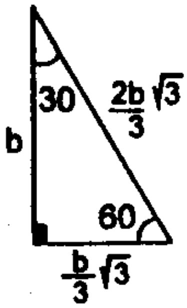
1. De 45°



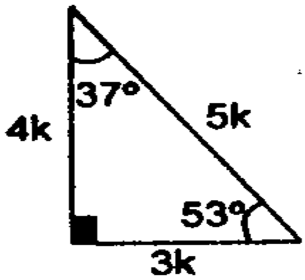


2. De 30° y 60°

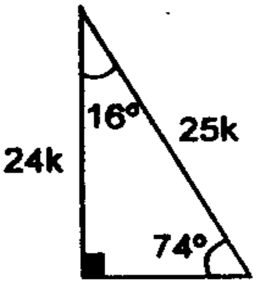




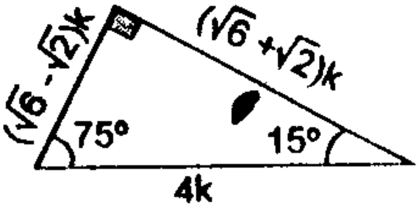
3. De 37° y 53°



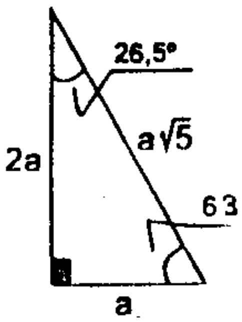
4. De 16° y 74°



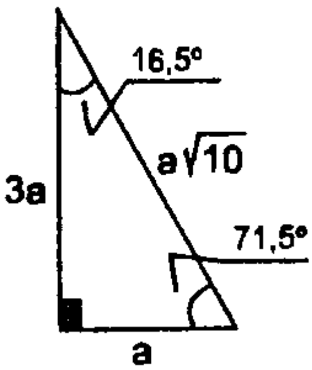
5. ◺ De 15° y 75°



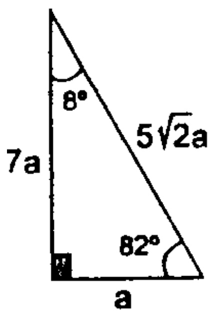
6. ◺ De 26,5 y 6...



7. ◺ De 18,5 ° y 71,5°



8. ◺ De 8° y 8...

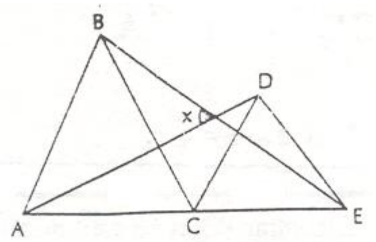


CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

Problema 1

Los triángulos ABC Y CDE son equiláteros. Hallar "x".

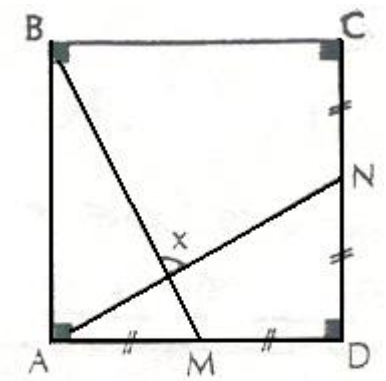


Resolución

Rpta. 60°

Problema 2

En el cuadrado ABCD, encontrar "x".

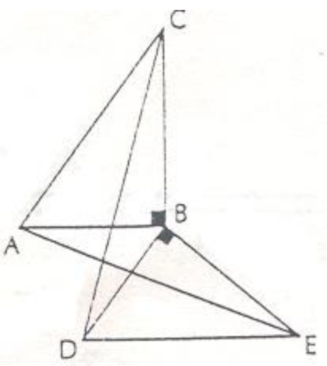


Resolución

Rpta. 90°

Problema 3

Los triángulos ABC y DBE son isósceles, si $\overline{DC}$ = 11. Hallar AE.

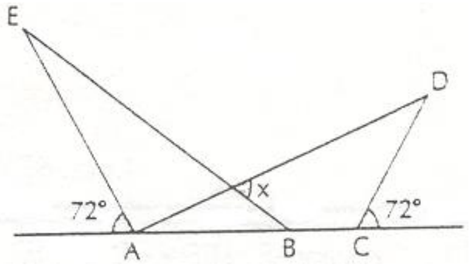


Resolución

Rpta. AE = 11

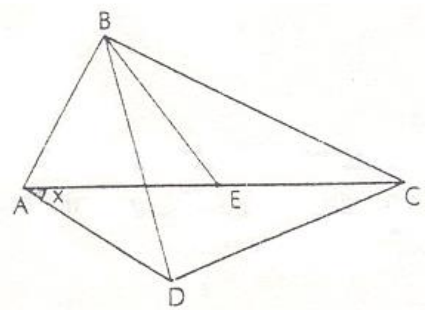
Problema 4

Calcular "x" , si AB = BC = CD= $\frac{AE}{2}$

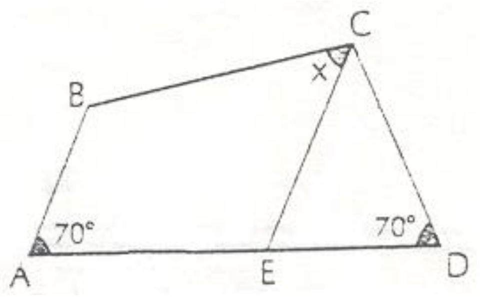


Resolución
Rpta. x = 72°

Problema 5
Los triángulos ABE y BDC son equiláteros. Hallar "x".



Resolución
Rpta. x = 60°
Problema 6
Encontrar "x", si AB = ED, AE=CD.



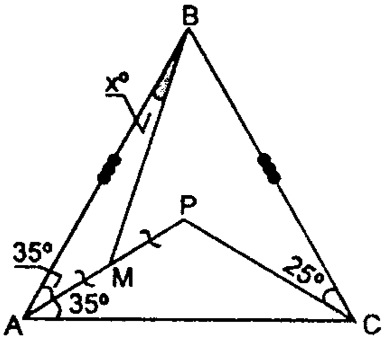
Resolución:
Rpta. x = 55°

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

Problema 01

En la figura: AB = BC, AM =MP. Calcular “x”.



a) 5° b) 10° c) 7,5°

d) 12° e) 15°

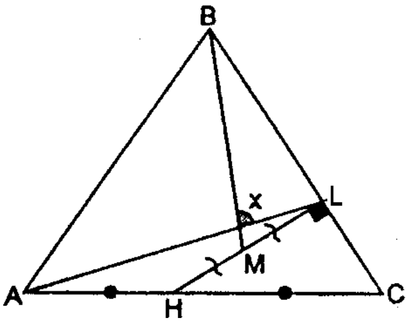
Problema 02

En la figura: AB = BC.

AH = HC;

HM = ML

Hallar x



a) 90° b) 60° c) 75°

d) 53° e) 120°

Problema 03

En un triángulo ABC se ubica el punto P en la región interior al triángulo y el punto medio Q de AC, de modo que: m $\angle$APB = 90, m$\angle$ABP = $\angle$APQ y AB = 2(PQ)= 4, calcular BC.

a) 8 b) 4 c) 8 d) 12 e) 10

Problema 04

En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ tal que la mediatriz de $\overline{AN}$ contiene el punto M. Si AB = MC, NC = BM y m$\angle \overline{MBM} = \alpha$, calcular la m$\angle \overline{BNA}$ en función de α.

a) 2α b) $\alpha/2$ c) 90 - $\alpha/2$
d) α e) 90 - α

Problema 05

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) considerando fijo el punto B, se hace girar dicho triángulo sobre su plano, de modo que la posición final de A y C es A´ y C´ respectivamente, de modo que: $\overline{BC'} // \overline{AC}$, $\overline{BC} \cap \overline{A'C'} = \{P\}; BP = 5;$ Pc = 1.

Calcular la longitud de la ceviana interior común para los triángulos ABC y A´B´C´.

a) $6\sqrt{10/5}$ b) $12\sqrt{5/5}$ c) $12\sqrt{5}$
d) $12\sqrt{3/5}$ e) $6\sqrt{3/5}$

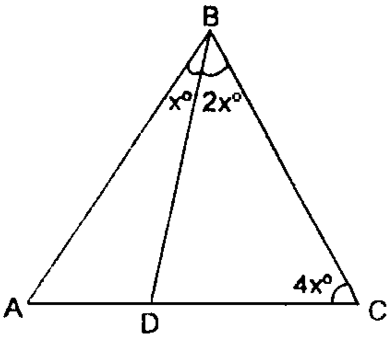
Problema 06

En un $\triangle$ABC, se ubica el punto exterior P relativo a $\overline{BC}$ tal que BPC es un triángulo equilátero. Luego se traza la altura $\overline{CH}$: (H en $\overline{AB}$); si: m $\angle$ACH=30 y CH=8. Calcular la distancia del punto medio de $\overline{AP}$ hacia $\overline{AC}$.

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{6}$

Problema 07

En la figura calcular "x" , SI BD = AC



a) 12 b) 18 c) 20
d) 15 e) 16

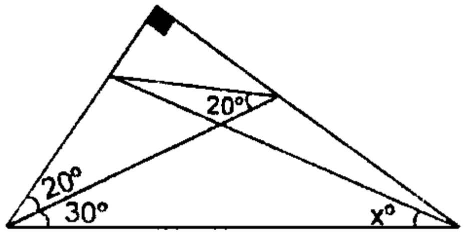
Problema 08

Calcular m $\angle$C en un ABC si m $\angle$A= 2(m$\angle$C) y la mediana $\overline{BM}$ forma con $\overline{AC}$ un ángulo que mide 45.

a) 12 b) 45 c) 30
d) 15 e) 10

Problema 09

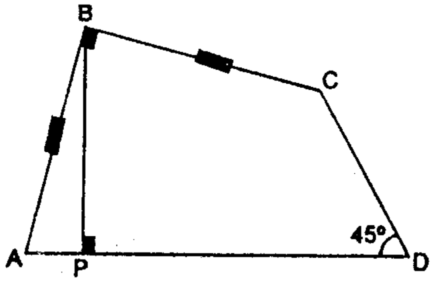
Del gráfico mostrado: Hallar x



a) 37 b) 30 c) 10
d) 45 e) 20

Problema 10

En la figura: AB = BC, AD = 20. Calcular BP.



a) 10 b) 15 c) 7,5
d) 8 e) N.A